INFORMATYKA I MATEMATYKA

Jan Rusinek

WARUNKOWA WARTOŚĆ OCZEKIWANA ZASTOSOWANA DO OCENY TESTÓW

[**słowa kluczowe.** zmienna losowa, warunkowa wartość oczekiwana, test, informatyzacja procesu dydaktycznego]

Streszczenie

W pracy wyniki z egzaminu testowego rozważane są jako zmienne losowe i analizowane są parametry tych zmiennych. Na podstawie tej analizy zaproponowane są algorytmy oceniania testów wielokrotnego wyboru.

1. Wstęp

Sprawdzanie wiedzy przy pomocy testów jest istotną częścią procesu dydaktycznego. Jest to zdaniem autora w pełni uzasadnione, pod warunkiem, że test jest tylko jednym z elementów weryfikacji wiedzy, najczęściej na końcowym etapie.

Rodzaje pytań testowych z przedmiotów ścisłych analizowane są np. w [5]. W pracach [3] i [4] są omawiane informatyczne narzędzia do tworzenia testów i przetwarzania wyników.

W pracy [6] wyniki egzaminu testowego **jednokrotnego wyboru** są rozważane jako zmienna losowa i na podstawie analizy pewnych sytuacji zaproponowany jest sprawiedliwszy zdaniem autora algorytm.

W tej pracy bazując na odpowiednich symulacjach, ich analizie oraz rachunku prawdopodobieństwa postaramy się zaproponować pewien algorytm dla testu **wielokrotnego wyboru**.

W teście wielokrotnego wyboru przy k odpowiedziach na pytanie może być od 0 do k poprawnych odpowiedzi w jednym pytaniu, co daje 2^k możliwości zamiast k (jak w teście jednokrotnego wyboru). Powoduje to, że przy tej samej liczbie pytań i odpowiedzi element przypadkowości jest dużo mniejszy, zatem bardziej obiektywne wyniki egzaminu uzyskujemy przy znacznie mniejszej liczbie zarówno pytań jak i odpowiedzi (podpunktów).

Mniejsza liczba pytań pozwala skonstruować pytanie głębiej sprawdzające wiedzę i umiejętności studenta i dać mu na analizę pytania więcej czasu.

W poniższej tabelce widzimy porównanie odpowiednich wyników przy testach jednokrotnego i wielokrotnego wyboru przy takich samych danych wejściowych.

Tabela 1

n	k	d	$n-d$	$P(J>d)$	$P(W>d)$	EJ	EW
16	3	7	9	0,97	0,69	10,00	8,13
16	3	6	10	0,89	0,36	9,33	7,25
16	4	7	9	0,92	0,44	9,25	7,56
16	4	6	10	0,75	0,12	8,50	6,63

Oznaczenia stosowane w tabelce i dalszej części artykułu:

- n – liczba pytań w teście,
- k – liczba odpowiedzi (podpunktów) na pytanie
- d – liczba pytań, na które student zna wszystkie odpowiedzi
- J – zmienna losowa opisująca liczbę prawidłowych odpowiedzi na pełne pytanie (tzw. **duże punkty**) przy teście jednokrotnego wyboru
- W – zmienna losowa opisująca liczbę prawidłowych odpowiedzi na pełne pytanie (**duże punkty**) przy teście wielokrotnego wyboru
- EX – wartość oczekiwana zmiennej losowej X

Tabelka 1 ilustruje sytuację, gdy mamy 16 pytań i 3 lub 4 odpowiedzi na pytanie. Praktycznie nie spotyka się testów z mniejszą niż 3 lub większą niż 4 liczbą podpunktów.

Przypuśćmy, że student otrzymuje ocenę pozytywną za 8 (50%) poprawnych pełnych odpowiedzi. Z tabelki wynika, że student, który zna tylko 7 odpowiedzi, a pozostałe skreśla losowo ma przy teście jednokrotnego wyboru odpowiednio prawdopodobieństwo 0,97 i 0,92 (czyli bardzo duże) że osiągnie wymagane 8 punktów, natomiast przy teście wielokrotnego wyboru te prawdopodobieństwa wynoszą odpowiednio 0,69 i 0,44. Student, który zna tylko 6 odpowiedzi, a pozostałe skreśla losowo przy teście jednokrotnego wyboru ma odpowiednio prawdopodobieństwo 0,89 i 0,75, że osiągnie wymagane 8 punktów, a przy teście wielokrotnego wyboru te prawdopodobieństwa wynoszą odpowiednio 0,36 i 0,12.

Widać, z tego, że przy teście jednokrotnego wyboru powinno się stosować jakąś poprawkę zniechęcającą studenta do losowego skreślania odpowiedzi. Jest to możliwe, bowiem w takim przypadku student nie zaznaczając w danym pytaniu żadnej odpowiedzi udziela informacji, że rezygnuje z odpowiedzi na to pytanie. Takie poprawki były omawiane w pracy [6].

W teście wielokrotnego wyboru takie poprawki nie są już aż tak konieczne (co wynika z tabelki), zwłaszcza przy 4 odpowiedziach na pytanie. Ponadto nie są one za bardzo możliwe, nie da się bowiem stwierdzić, czy student nie udzielił żadnej odpowiedzi „TAK" na konkretne pytanie dlatego, że zrezygnował z analizy tego pytania, czy dlatego, że uznał wszystkie odpowiedzi w tym pytaniu za fałszywe.

W pracy [6] była również podana dla testów jednokrotnego wyboru propozycja, jak uwzględniać fakt, że student może być pewien niektórych odpowiedzi na pytania. Proponowane tam rozwiązanie polegało na tym, że w takiej sytuacji już opłacało się studentowi analizować to pytanie i udzielać na nie odpowiedzi. Tym niemniej ponosi on pewne ryzyko i może tego ryzyka uniknąć rezygnując z odpowiedzi. Przy testach wielokrotnego wyboru takiej możliwości nie ma, ale pokusimy się o pewną propozycję opartą na **rozkładach warunkowych** i **warunkowej wartości oczekiwanej**.

Wprowadźmy jeszcze oznaczenia:

- M – zmienna losowa opisująca liczbę prawidłowych odpowiedzi na podpunkty (tzw. **małe punkty**)
- D^2 – wariancja zmiennej losowej
- D – odchylenie standardowe zmiennej losowej
- p_i – liczba pytań, w których student zna i prawidłowych odpowiedzi
- p – sumaryczna liczba znanych odpowiedzi na podpunkty

Przypuśćmy, że test składa się z 16 pytań i 4 podpunktów w każdym pytaniu. Zakładamy też, że od 8 punktów (50%) egzamin jest zaliczony. Student zna pełne odpowiedzi na 7 pytań. Jeśli pozostałe pytania skreśla zupełnie losowo, to z tabelki wynika, że prawdopodobieńtwo uzyskania brakującego dużego punktu wynosi 0,44, czyli ze zbliżonym prawdopodbieństwem student albo uzyska ten brakujący punkt albo nie. Proponowane rozwiązanie w pewnym stopniu łagodzi tę „niesprawiedliwość”. Polega ono na tym, że można sobie nadrobić ten brak szczęścia dzięki mniejszej lub większej dodatkowej wiedzy „zgromadzonej” w pozostałych pytaniach. Załóżmy mianowicie, że student dodatkowo jest pewien p podpunktów „rozrzuconych” w pozostałych 9 pytaniach. Oznacza to, że zmienna losowa W przyjęła wartość 7 i trzeba rozważać rozkład warunkowy zmiennej losowej M pod warunkiem zdarzenia $W = 7$. Podanie wszystkich takich rozkładów jest bardzo żmudne (choć wykonalne), trzeba by rozważać wiele przypadków w zależności od tego jak rozrzucone są znane studentowi podpunkty.

Np. w omawianej sytuacji dla $p = 6$ możemy mieć między innymi takie dane:

- $p_3 = 2$, $p_2 = p_1 = 0$, $p_0 = 7$,
- $p_3 = 1$, $p_2 = 1$, $p_1 = 1$, $p_0 = 6$,
- $p_3 = 0$, $p_2 = 3$, $p_1 = 0$, $p_0 = 3$,
- $p_3 = 0$, $p_2 = 0$, $p_1 = 6$, $p_0 = 3$.

Możliwości jest znacznie więcej i widać z tego, że podanie pełnych szczegółowych rozkładów byłoby żmudne.

Zamiast tego proponujemy posłużyć się odpowiednią wartością oczekiwaną, czyli tzw. **warunkową wartością oczekiwaną** (oznaczaną $E(X|Y = a)$) i ewentualnie wariancją bądź odchyleniem standardowym interesującego nas rozkładu.

2. Proponowane rozwiązanie

Przypuśćmy, że student zna pełne odpowiedzi na d pytań oraz na p podpunktów z pozostałych $n - d$ pytań. Od $d + 1$ dużych punktów student otrzymuje pewną ocenę, czyli brakuje mu jednego punktu. Chcąc w jakiś sposób uwzględnić w ocenie studenta brak szczęścia i ewentualnie tę „dodatkową” wiedzę ukrytą w liczbie p można zaproponować następujące rozumowanie:

Gdyby student znał to dodatkowe brakujące pytanie, to znałby k małych punktów skoncentrowanych w tym pytaniu. Zamiast tego „uwzględnimy” mu małe punkty rozrzucone w wielu pytaniach. Wprowadzamy w tym celu pewien współczynnik – oznaczmy go przez v ($v > 0$), taki, że student zna vk podpunktów rozrzuconych w pytaniach, na które nie odpowiedział w pełni.

Praktyczna interpretacja współczynnika v jest następująca: przyjmujemy $v = 0$, jeśli obniżając granicę dużych punktów chcemy tylko wyrównać szanse zdającego w stosunku do drugiego studenta mającego taką samą wiedzę, ale więcej szczęścia skutkującego dodatkowym dużym punktem; przyjmujemy $v = 1$, jeśli obniżając granicę dużych punktów chcemy aby zamiast dużego punktu student znał równoważną liczbę k odpowiedzi, ale porozrzucanych w różnych pytaniach; przyjmujemy $v > 1$, jeśli w zamian za obniżenie wymogów student powinien znać nieco więcej odpowiedzi na podpunkty.

Będziemy badać warunkową wartość oczekiwaną zmiennej M pod warunkiem $W = d$ oraz odpowiednie odchylenia standardowe i na podstawie analizy konkretnych sytuacji zaproponujemy pewien ogólny wzór.

Na początek zauważmy, że musimy przyjąć, że student uzyskujący d dużych punktów znał na nie odpowiedzi (nie możemy bowiem „karać” tych, którzy nie mieli szczęścia). Oznacza to, że liczba d jest ustalona (nie jest zmienną losową)[1] możemy więc w celu przejrzystości analizy założyć, że $d = 0$ i rozważać tylko $n - d$ (oznaczmy $n - d = r$) „pozostałych pytań”.

Przeprowadzimy analizę dla $n = n - d = 6$ dla kilku wybranych sytuacji i na tej podstawie zaproponujemy pewien interpolacyjny wzór.

Skorzystamy z następujących faktów ([1], [2]):

- Wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych jest równa sumie wartości oczekiwanych tych zmiennych
- Wariancja sumy niezależnych zmiennych losowych jest równa sumie wariancji tych zmiennych.

Zatem aby otrzymać wyniki dla dowolnego $n - d$, wystarczy wyliczyć warunkowe wartości oczekiwane i odpowiednie wariancje zmiennej losowej M_0 odpowiadającej liczbie małych punktów w jednym pytaniu (zakładamy, że student odpowiada na pytania niezależnie, tzn. każde dotyczy nieco innego zagadnienia bądź umiejętności).

W poniższej tabelce widzimy łączny rozkład zmiennych M_0 i W, jeśli pytanie należy do grupy p_0, co oznacza, że student nie zna odpowiedzi na żaden podpunkt w tym pytaniu.

[1] Oczywiście statystycznie tak nie jest!

Tabela 2

W \ M_0	$M_0 = 0$	...	$M_0 = k-1$	$M_0 = k$	
$W = 0$	$\frac{\binom{k}{0}}{2^k} \cdot \left(\frac{2^k-1}{2^k}\right)^{r-1}$	...	$\frac{\binom{k}{k-1}}{2^k} \cdot \left(\frac{2^k-1}{2^k}\right)^{r-1}$	0	$\left(\frac{2^k-1}{2^k}\right)^r$
$W > 0$	$\frac{\binom{k}{0}}{2^k}\left(1 - \left(\frac{2^k-1}{2^k}\right)^{r-1}\right)$	...	$\frac{\binom{k}{k-1}}{2^k}\left(1 - \left(\frac{2^k-1}{2^k}\right)^{r-1}\right)$	$\binom{k}{k}\frac{1}{2^k}$	$1 - \left(\frac{2^k-1}{2^k}\right)^r$
	$\binom{k}{0}\frac{1}{2^k}$	...	$\binom{k}{k-1}\frac{1}{2^k}$	$\binom{k}{k}\frac{1}{2^k}$	

Stąd

$$P(M_0 = i|W = 0) = \frac{P(M_0 = i, W = 0)}{P(W = 0)} = \begin{cases} \frac{\binom{k}{i}}{2^k-1} & \text{dla} \quad i < k \\ 0 & \text{dla} \quad i = k. \end{cases}$$

Zatem warunkowa wartość oczekiwana $E(M_0|W = 0)$ będzie równa ([1])

$$E(M_0|W = 0) = \sum_{i=0}^{k} iP(M_0 = i|W = 0) = \frac{1}{2^k - 1}\sum_{i=0}^{k-1} i\binom{k}{i}$$

$$= \frac{1}{2^k - 1}\sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i} - \frac{1}{2^k - 1}k\binom{k}{k}$$

$$= \frac{2^k}{2^k - 1}\left[\sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i}\frac{1}{2^k}\right] - \frac{1}{2^k - 1}k\binom{k}{k}.$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym oznacza wartość oczekiwaną w k próbach odpowiedniego rozkładu dwumianowego i wynosi $\frac{k}{2}$ ([1], [2]). Ostatecznie otrzymujemy

$$E(M_0|W = 0) = k\frac{2^{k-1} - 1}{2^k - 1}.$$

Oznaczmy otrzymaną wielkość przez $e(k, 0)$. I tak na przykład $e(2, 0) = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$, $e(3, 0) = \frac{9}{7} \approx 1{,}29$, $e(4, 0) = \frac{28}{15} \approx 1{,}87$ itd.

Łatwo można zauważyć, że wartość oczekiwana w pytaniu z grupy p_j wynosi

$$e(k, j) = j + e(k - j, 0) = j + (k - j)\frac{2^{k-j-1} - 1}{2^{k-j} - 1}.$$

Podobnie policzymy wariancję zmiennej $M_0|W = 0$ dla pojedynczego pytania otrzymując

$$D^2(M_0|W = 0) = \frac{1}{2^k - 1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\left(i - e(k, 0)\right)^2.$$

Oznaczmy ją przez $w^2(k)$. W interesujących nas przypadkach mamy $w^2(2) \approx 0{,}22$, $w^2(3) \approx 0{,}49$, $w^2(4) \approx 0{,}78$.

Wprowadzając odpowiednie wzory np. do arkusza kalkulacyjnego otrzymamy poniższe przykładowe tabele:

Tabela 3

r	k	p	p_2	p_1	p_0	EW	EM	$E(M\|W=0)$	$P(W>0)$	$D(M\|W=0)$
6	3	4	2	0	4	1,50	11	9,14	0,85	1,40
6	3	4	0	4	2	1,25	11	9,24	0,76	1,37
6	3	6	3	0	4	1,88	12	9,86	0,92	1,21
6	3	6	0	6	0	1,50	12	10,00	0,82	1,15

Tabela 4

r	k	p	p_3	p_2	p_1	p_0	EW	EM	$E(M\|W{=}0)$	$P(W{>}0)$	$D(M\|W{=}0)$
6	4	6	2	0	0	4	1,25	15	13,47	0,81	1,77
6	4	6	0	0	6	0	0,75	15	13,71	0,55	1,71
6	4	12	0	6	0	0	1,58	15	16,00	0,82	1,15

Analizując te tabele dochodzimy do następujących wniosków:

1) Różnica pomiędzy najkorzystniejszą sytuacją (tzn. dającą najwieksze prawdopodobieństwo dodatkowego dużego punktu), kiedy dodatkowa znajomość odpowiedzi na pytania jest skupiona w małej liczbie punktów, a sytuacją najmniej korzystną, kiedy jest bardziej rozproszona, jest niewielka.

2) Odchylenie standardowe waha się w okolicy 1–2 punktów, czyli jest bardzo małe. Prowadzi to następującej propozycji:

Jeśli graniczna liczba dużych punktów, za którą przyznajemy jakąś ocenę wynosi $d + 1$, to możemy te wymagania nieco obniżyć dopuszczając wynik d dużych punktów oraz liczbę małych punktów wynikających z odpowiedniej wartości oczekiwanej.

Zaproponujemy najbardziej wygodną do obliczeń sytuację, kiedy znane podpunkty są równomiernie rozproszone. W takiej sytuacji jeśli np. $p = 6$, to $p_3 = p_2 = p_0 = 0$, a $p_1 = 6$. Jeśli $p = 12$, to $p_3 = p_1 = p_0 = 0$, a $p_2 = 6$.

W pierwszym przypadku otrzymujemy $E(M|W = 0)$ równe $6e(4, 1)$, czyli $re(k, 1)$, a w drugim $re(k, 2)$. Zauważmy, że w pierwszym przypadku $p = 1{,}5k$, czyli $v = 1{,}5$, w drugim $p = 3k$, czyli $v = 3$. To nasuwa następujący pomysł:

Przedłużyć wzór na funkcję $e(k,j)$ na dowolne j rzeczywiste dodatnie i wstawić $j = \frac{vk}{r}$. Wtedy otrzymamy ostatecznie wzór

$$f(r,k,v) = r \cdot e(k,j) = r \cdot e\left(k, \frac{vk}{r}\right).$$

Nieco trudniej byłoby przedłużyć odpowiedni wzór na wariancję, ale zauważmy, że funkcja $w^2(k)$ wyliczona dla $k = 2,3,4$ jest prawie liniowa. Poprawiając ją przy pomocy metody najmniejszych kwadratów do funkcji liniowej otrzymamy wzór

$$w^2(x) = 0{,}28x - 0{,}34.$$

Stąd otrzymamy wzór na wariancję

$$g^2(r,k,v) = r \cdot w^2\left(k - \frac{vk}{r}\right),$$

i na odchylenie standardowe $g(r,k,v) = \sqrt{g^2(r,k,v)}$.

Można zatem zaproponować następujący wzór (na razie wstępny) na poprawiony próg oceny:

Oprócz $d+1$ dużych punktów wystarczy ich również d oraz liczba małych punktów będących odpowiednią warunkową wartością oczekiwaną poprawioną (w dół) o odpowiednie odchylenie standardowe.

To wymaga jeszcze poprawki dla bardzo małych r; na przykład jeśli $r = 2$, $k = 3$, $v = 2$ student musiałby uzyskać $n - 2$ dużych punktów oraz prawie wszystkie dodatkowe małe punkty, czyli de facto również wszystkie duże punkty. Proponujemy zatem użyć jeszczcze pewnego wspólczynnika, który dla większych r jest bliski 1, a dla małych jest istotnie mniejszy od jedynki. Po kilku symulacjach autor proponuje wspólczynnik $h(r) = 1 - 2^{-r/2}$. Na przykład $h(2) = 0{,}5$, $h(4) = 0{,}75$, $h(10) = 0{,}97$.

Ostatecznie proponowany wzór na próg małych punktów wynosi

$$m(k,v,r) = dk + h(r)[f(k,v,r) - g(k,v,r)].$$

Dalej zauważmy, że wykorzystywane wzory pozwalają brać również d (zatem i $r = n - d$) niecałkowite. Jest to bardzo przydatne, bo najwygodniej podawać wymagane progi procentowe na poszczególne oceny. Na stronie internetowej
`http://www.rusinek.wsm.warszawa.pl/testy/ocenatestoww.zip`
autor umieścił arkusz do excela (calca), razem z krótką instrukcją, realizujący

tę ideę. Wystarczy podać n – liczbę pytań w teście, k – liczbę odpowiedzi, współczynnik v oraz procentowe wymogi dla poszczególnych ocen, a program automatycznie uwzględnia powyższy algorytm i proponuje zmodyfikowane graniczne wymogi. Oto jego przykładowa realizacja:

Tabela 5

n	k	v	% na 3	% na 3+	% na 4	% na 4+	% na 5
15	4	0,5	50	58	66	74	82
Progi punktowe							
Duże punkty			6,5	7,7	8,9	10,1	11,3
Małe punkty			39,34	41,86	44,35	46,86	49,45

Pewną niedogodnością jest to, że otrzymane wyniki są liczbami niecałkowitymi. Zostawienie ich jako ostatecznych progów powoduje, że zarówno duże jak i małe punkty są automatycznie zokrąglane do liczby całkowitej w górę, co przy małej części ułamkowej może być krzywdzące. W proponowanym programie jest to poprawiane w następujący sposób: jeśli otrzymany wynik wynosi x dużych punktów, to poprawiamy go albo do liczby całkowitej mniejszej $\lfloor x \rfloor$ (tzw. podłoga), albo większej $\lceil x \rceil$ (tzw. sufit). Proponujemy dodać do granicznej liczby małych punktów liczbę $v(x - \lfloor x \rfloor)$ w pierwszym przypadku i odjąć liczbę $v(\lceil x \rceil - x)$ w drugim. Po tym zaokrąglamy liczbę małych punktów również do najbliższej liczby całkowitej.

Poniżej prezentujemy przykładowy wynik uwzględniający te poprawki.

Tabela 6

n	k	v	% na 3	% na 3+	% na 4	% na 4+	% na 5
17	4	0,8	50	60	70	80	90
Progi punktowe							
Duże punkty			7,5	9,2	10,9	12,6	14,3
Małe punkty			45,68	49,24	52,74	56,25	59,97
Zaokrąglenie punktów do liczby całkowitej							
Duże punkty			7	9	11	13	14
Małe punkty			46	49	53	56	60

3. Podsumowanie

Zaprezentowana propozycja nie jest oczywiście idealna. Na przykład jeśli chcielibyśmy przy ustalaniu progów ocen uwzględniać wymagania sugerowane przez Europejski System Transferu i Akumulacji Punktów (ECTS) ([7]) [wśród ocen pozytywnych ma być po 10% ocen A i E (u nas 5 i 3), po 25% ocen B i D (u nas 4,5 i 3,5) oraz 30% ocen C (u nas 4)], to nasz algorytm można by stosować tylko dla oceny dostatecznej. Pozostałe progi trzeba by tak ustalać, aby uzyskać wymagane procenty. Poza tym każdy wykładowca ma swoje wymagania zależne od wielu czynników – trudność przedmiotu, waga tego przedmiotu na danym kierunku nauczania, inne elementy będące częścią zaliczenia przedmiotu (jak prace domowe, prace seminaryjne, prezentacje, projekty itp.). Tym niemniej wydaje się, że powyższy algorytm dzięki wykorzystaniu narzędzi rachunku prawdopodobieństwa czyni wyniki egzaminu bardziej sprawiedliwymi.

Bibliografia

[1] Jakubowski J., Sztencel R., (2002); *Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego*, Script, Warszawa

[2] Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowski K, Wasilewski W, (2000); *Rachunek prawdopodobieństawa i statystyka matematyczna w zadaniach*, PWN

[3] Rusinek J., (2007); *Algorytm permutowania w TeX-u zastosowany do informatyzacji procesu egzaminacyjnego*, „Rocznik Naukowy Wydziału Zarządzania w Ciechanowie", 1-4 (I), (153–174)

[4] Rusinek J., (2008); *Pliki do odczytu i zapisu w TeX-u – zastosowanie do przetwarzania wyników egzaminu* , „Rocznik Naukowy Wydziału Zarządzania w Ciechanowie", 1-2 (II), (107–124)

[5] Rusinek J., (2009); *Testy egzaminacyjne z matematyki*, „Rocznik Naukowy Wydziału Zarządzania w Ciechanowie", 3-4 (III), (101–111)

[6] Rusinek J., (2012); *Rachunek prawdopodobieństwa wspomaga dydaktykę*, „Rocznik Naukowy Wydziału Zarządzania w Ciechanowie", 3-4 (VI), (51–66)

[7] (2009); *Europejski System Transferu i Akumulacji Punktów, przewodnik użytkownika*, Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji `ekspercibolonscy.org.pl/sites/ekspercibolonscy.org.pl/files/przewodnik_ECTS_2009_pol.pdf`

[8] (2013) `http://www.rusinek.wsm.warszawa.pl/testy/`