INFORMATYKA I MATEMATYKA

Jan Rusinek

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA WSPOMAGA DYDAKTYKĘ

[**słowa kluczowe.** zmienna losowa, schemat Bernoulliego, test, informatyzacja procesu dydaktycznego]

Streszczenie

W pracy wyniki z egzaminu testowego rozważane są jako zmienne losowe i analizowane są rozkłady tych zmiennych. Na podstawie tej analizy zaproponowane są algorytmy oceniania testów.

1. Wstęp

Sprawdzanie wiedzy jest istotną częścią procesu dydaktycznego. Wiele egzaminów czy zaliczeń na różnym etapie edukacji przeprowadza się przy pomocy testów. Spotkać się można z zarzutem, że oceny oparte na teście zawierają elementy przypadkowości; można na przykład zdać egzamin mając szczęście, tak jak w grze losowej. Jest to niewątpliwie prawda, ale czy egzaminy ustne przeprowadzane „klasyczną metodą", kiedy na przykład student otrzymuje jedno, dwa pytania nie zawierają elementu przypadkowości? Takie pytania zawsze dotyczą tylko drobnej części wymaganego materiału. I może się zdarzyć, że student otrzyma pozytywną ocenę znając tylko tę „wylosowaną" część materiału, ale może się również zdarzyć, że zna np. 80% materiału, a dostanie pytanie spośród pozostałych 20-tu procent.

W wypadku testów, przynajmniej tej drugiej „niesprawiedliwości" można uniknąć obejmując testem całość lub większość materiału danego przedmiotu i ustawiając odpowiednie progi ocen. Omówienie rodzajów pytań testowych z przedmiotów ścisłych można znaleźć np. w [5]. W pracach [3] i [4] są omawiane informatyczne narzędzia do tworzenia testów i przetwarzania wyników.

Element losowości przy każdym egzaminie, również testowym pozostaje (wyjąwszy przypadek, że student zna wszystkie odpowiedzi na wszystkie pytania) i w związku z tym wydaje się rozsądne użyć do oceny wyników testu odpowiedniego aparatu rachunku prawdopodobieństwa.

W pracy tej chcielibyśmy zaproponować pewne algorytmy oceny testów wykorzystujące taki aparat oraz dzięki analizie przeprowadzonej symulacji zaproponować pewne jego udoskonalenia. W uproszczonej wersji algorytm został zaproponowany w [5].

Testy można podzielić na testy jednokrotnego i wielokrotnego wyboru. W tym artykule zaproponujemy algorytm dotyczący testu jednokrotnego wyboru.

2. Proponowany algorytm

Przy teście jednokrotnego wyboru dokładnie jedna odpowiedż na każde pytanie jest prawdziwa.

Na egzaminach z matematyki pytania jednokrotnego wyboru wydają się być sensowne m.in. wtedy, gdy w pytaniu chodzi o podanie konkretnej liczby z przeprowadzonego obliczenia. Premiujemy wówczas umiejętność wyboru poprawnej metody rozwiązania, a redukujemy „kary” za błędy rachunkowe. Jeśli bowiem w trakcie rozwiązania zostanie taki błąd zrobiony, to prawie na pewno nie będzie prawdziwa żadna z odpowiedzi i student najprawdopodobniej zacznie tego błędu poszukiwać.[1]

Pierwszym naturalnym założeniem przy punktowaniu takiego testu powinno być następujące:

Jeśli student zna prawidłową odpowiedź na dane pytanie i zakreśli ją, to otrzymuje jeden punkt. Wynika to z naturalnego wymogu, że osoba, która prawidłowo odpowiedziała na wszystkie pytania w teście powinna uzyskać tyle punktów, ile było w teście pytań.

Jeśli natomiast nie zna odpowiedzi, to ma do wyboru: albo zrezygnować z odpowiedzi na to pytanie i nic nie zaznaczyć, albo zaznaczyć „losowo” i liczyć na szczęście.

Chcielibyśmy aby osoba „przyznająca się do niewiedzy” miała większe szanse na lepszy wynik niż osoba która skreśla zupełnie losowo. Aby ten efekt uzyskać należy użyć rachunku prawdopodobieństwa.

Wprowadzamy oznaczenia:
n — liczba pytań w teście,
k — liczba odpowiedzi na pytanie,
d — duże punkty, czyli liczba pytań z dobrze zaznaczoną odpowiedzią

[1]Niestety nie można wykluczyć, że zamiast tego zacznie szukać innej metody!

m — małe punkty uzyskane z testu,
z — liczba pytań ze źle zaznaczoną odpowiedzią,
b — liczba pytań z niezaznaczoną odpowiedzią,
w — sumaryczna liczba punktów z testu.

Za prawidłowo zaznaczone całe pytanie uzyskujemy k małych punktów, za pytanie ze źle zaznaczoną odpowiedzią $k-2$ małych punktów, a za pytanie z niezaznaczoną odpowiedzią $k-1$ małych punktów. Prowadzi to do równania

$$m = dk + z(k-2) + b(k-1).$$

Wstawiając $b = n - d - z$ otrzymujemy

$$m = dk + z(k-2) + (n-d-z)(k-1).$$

Jeśli będziemy używać narzędzi informatycznych w postaci skanera i odpowiedniego oprogramowania omawianych w [3], to w wyniku „przepuszczenia" testów przez skaner uzyskamy dane w postaci dużych punktów (za prawidłową odpowiedź za całe pytanie) i małych punktów (za prawidłowe zaznaczenie poszczególnych odpowiedzi). Czyli będziemy mieli dane liczby n, d i m. Wyliczając z tego z i b mamy

$$z = n(k-1) + d - m,$$

oraz

$$b = n(2-k) - 2d + m.$$

Przyjmijmy, że za złą odpowiedź student otrzymuje x punktów za brak odpowiedzi y punktów.

W takim razie sumaryczna liczba punktów wyniesie

$$p = d + x\big(n(k-1) + d - m\big) + y\big(n(2-k) - 2d + m\big).$$

Najlogiczniej przyjąć $y = 0$, co oznacza, że za zupełny brak wiedzy na dany temat i przyznanie się do tego nie otrzymuje się ani żadnej nagrody ani kary. Innymi słowy student, który oddał „czystą kartkę" otrzymuje zero punktów.

Wynik osoby, która nie skreśla losowo jest zdeterminowany, natomiast wynik osoby skreślającej losowo może być różny. Jest zatem **zmienną losową** będącą sumą punktów za poszczególne pytania. Ponieważ wartość oczekiwana sumy jest równa sumie wartości oczekiwanych, wystarczy rozważyć wartość

Tabela 1

x_i	1	x
p_i	$\frac{1}{k}$	$\frac{k-1}{k}$

oczekiwaną zmiennej losowej opisującej punkty uzyskane za jedno losowo skreślane pytanie.

Prawdopodobieństwo losowego skreślenia poprawnej odpowiedzi wynosi $\frac{1}{k}$, zaś prawdopodobieństwo skreśleniania odpowiedzi niepoprawnej wynosi $\frac{k-1}{k}$. Omawiana zmienna losowa jest zatem zmienną dwupunktową o rozkładzie danym w tabeli 1:

Stąd wartość oczekiwana jest równa ([1])

$$1 \cdot \frac{1}{k} + x\frac{k-1}{k}.$$

Ma ona być nie większa niż wynik studenta, który nie zakreślił odpowiedzi czyli niż 0, skąd wynika, że

$$x \leqslant -\frac{1}{k-1}.$$

Ale nie zawsze będzie tak, że wybór odpowiedzi jest istotnie **czysto losowy**. Zademonstrujemy to przykładzie.

PYTANIE 1. Rozważamy funkcję $f(x) = \frac{4x^2-8x+5}{x-1}$ w przedziale otwartym $(0;1)$. Wtedy funkcja ta w tym przedziale

$\boxed{\text{A}}$ posiada minimum (NIE)

$\boxed{\text{B}}$ jest ograniczona; (NIE)

$\boxed{\text{C}}$ jest wypukła; (NIE)

$\boxed{\text{D}}$ jest wklęsła; (TAK).

Przypuśćmy, że student zna algorytm wyznaczania ekstremów funkcji (np. [2]) i robi to następująco:

Oblicza pochodną funkcji otrzymując:

$$f'(x) = \frac{4x^2-8x+3}{(x-1)^2}.$$

Wyznacza miejsca zerowe pochodnej (rozwiązując równanie kwadratowe): $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Zauważa, że tylko x_1 leży w rozważanym przedziale i wyznacza znak pochodnej na prawo i na lewo od miejsca zerowego na przykład:

$$f'(0{,}1) = \frac{0{,}04 - 0{,}8 + 3}{(0{,}1-1)^2} > 0,$$

$$f'(0{,}9) = \frac{3{,}24 - 7{,}2 + 3}{(0{,}9-1)^2} < 0.$$

Wnioskuje z tego, że w punkcie $\frac{1}{2}$ jest maksimum, zatem odpowiedź A jest fałszywa.

Nie wie natomiast, która odpowiedź z pozostałych jest prawdziwa.

Tym niemniej powinien on mieć większe szanse na lepszy wynik niż student, który skreśla wszystkie odpowiedzi zupełnie losowo.

Oznacza to, że jego wartość oczekiwana uzyskanych punktów za to pytanie powinna być większa niż przy skreślaniu całkowicie losowym.

Rozważymy problem ogólniejszy. W pierwszym przypadku potrafimy wykluczyć u odpowiedzi, czyli „losujemy” spośród $v = k - u$, a w drugim $u+1$ odpowiedzi, zatem losujemy spośród $v-1$.

Prawdopodobieństwo skreślenia poprawnej odpowiedzi wynosi w pierwszym wypadku $\frac{1}{v}$, a niepoprawnej $\frac{v-1}{v}$, zatem wartość oczekiwana jest równa

$$1 \cdot \frac{1}{v} + x\frac{v-1}{v}$$

Natomiast w drugim przypadku odpowiednio $\frac{1}{v-1}$ i $\frac{v-2}{v-1}$ zatem wartość oczekiwana wyniesie

$$1 \cdot \frac{1}{v-1} + x\frac{v-2}{v-1}.$$

Ta druga wartość ma być większa. Będzie to spełnione dla $x < 1$ zatem dla $x < -\frac{1}{k-1}$ mamy żądany efekt.

Wydaje się jednak, że student, który potrafi wykluczyć przynajmniej jedną z odpowiedzi na dane pytanie powinien już być wyżej „oceniony” niż student, który nic na dane pytanie nie wie (niezależnie od tego czy się do tej niewiedzy przyznaje czy nie). Oznacza to, że wartość oczekiwana w tym wypadku powinna być dodatnia, co oznacza, że musi być spełniona nierowność:

$$1 \cdot \frac{1}{k-1} + x\frac{k-2}{k-1} > 0,$$

skąd

$$x > -\frac{1}{k-2}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$x \in \left(-\frac{1}{k-2}; -\frac{1}{k-1}\right].$$

Im bardziej chcemy nagradzać za wiedzę pozwalającą wykluczyć przynajmniej jedną odpowiedź, tym bardziej x powinno być bliskie prawego końca tego przedziału.

W proponowanej w dalszej części pracy konkretnej implementacji omawianego algorytmu jest zaproponowane 11 stopniowe ($s = 0, \ldots, 10$) „nagradzanie" za częściową wiedzę (jest to jednocześnie „zniechęcanie" do całkowicie losowego zaznaczania) odpowiadające wartości

$$x = -\frac{1}{k-1} - \frac{s}{10}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right).$$

Wykorzystując ten algorytm przeprowadziliśmy kilka symulacji i pokusiliśmy się o pewne wnioski.

Przypuśćmy, że test składa się z 24 pytań i z 4 odpowiedzi na każde pytanie. Postulujemy, że od 12 punktów jest ocena dostateczna, od 14 dostateczna plus, od 16 dobra, od 18 dobra plus i od 20 dobra. Przypuśćmy, że trzej studenci znają odpowiedzi na 12 pytań, przy czym student S_0 na pozostałe nie wie nic, student S_1 potrafi w pozostałych wykluczyć jedną odpowiedź, a student S_2 potrafi wykluczyć 2 odpowiedzi.

Gdyby student pozostawił pozostałe pytania bez odpowiedzi, to uzyskałby 12 punktów i ocenę dostateczną. Jeśli będzie skreślał losowo, to w zależności od „szczęścia" uzyska od 12 do 24 dużych punktów. Oznaczmy przez w_s wyniki wyliczone przy stopniu nagradzania $s = 0$, $s = 1$, $s = 5$ oraz $s = 9$.

Wszystkie te wielkości: d, z, m, w_i ($i = 0, 1, 5, 9$) będą zmiennymi losowymi o rozkładach zależnych od tego, którego studenta rozważamy.

Wyznaczymy te rozkłady.

Aby uzyskać $12 + j$, $j = 0, 1, \ldots, 12$ dużych punktów (czyli aby $d = 12 + j$) trzeba uzyskać i sukcesów w 12 próbach schematu Bernoulliego dla $p = \frac{1}{4}$ w przypadku studenta S_0, $p = \frac{1}{3}$ w przypadku studenta S_1 i $p = \frac{1}{2}$ w przypadku studenta S_2. Biorąc pod uwagę wzór na prawdopodobieństwo takich zdarzeń $b(p, N, K) = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$ ([1]) otrzymujemy tabelę 2.

Dla łatwiejszej orientacji zaokrąglamy większe prawdopodobieństwa do dwóch miejsc po przecinku, dlatego nie musi się wszystko sumować dokładnie do jedynki). Wartości danej zmiennej losowej umieszczamy w kolumnach.

Tabela 2

p_0	p_1	p_2	d	z	m	w_0	w_1	w_5	w_9
0,03	0,008	0,0002	12	12	72	8	7,8	7	6,2
0,13	0,05	0,003	13	11	74	9,33	9,15	8,42	7,68
0,23	0,18	0,016	14	10	76	10,67	10,50	9,83	9,17
0,26	0,21	0,05	15	9	78	12,00	11,85	11,25	10,65
0,19	0,24	0,12	16	8	80	13,33	13,20	12,67	12,13
0,10	0,19	0,19	17	7	82	14,67	14,55	14,08	13,62
0,04	0,11	0,23	18	6	84	16,00	15,90	15,50	15,10
0,011	0,05	0,19	19	5	86	17,33	17,25	16,92	16,58
0,0024	0,015	0,12	20	4	88	18,67	18,60	18,33	18,07
0,00035	0,0033	0,05	21	3	90	20,00	19,95	19,75	19,55
0,000035	0,0005	0,016	22	2	92	21,33	21,30	21,16	21,03
$2 \cdot 10^{-6}$	0,000045	0,003	23	1	94	22,66	22,65	22,58	22,51
$6 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-6}$	0,0002	24	0	96	24,00	24,00	24,00	24,00

Analizując tę tabelkę można wydedukować, że chyba dobrym stopniem „nagradzania” jest 1 (ale 0 też wygląda sensownie). Przy takim wyborze student, który zaznaczył poprawnie 12 pytań, a pozostałe zostawił puste ma 12 punktów i ocenę dostateczną. Natomiast student S_0, który zupełnie losowo zanacza pozostałe 12 odpowiedzi z prawdopodobieństwem 0,65 uzyska liczbę punktów niższą niż 12, a więc nie zaliczy egzaminu, z prawdopodobieństwem 0,19 uzyska liczbę punktów pomiędzy 12 i 14, czyli dostanie ocenę dostateczną, z prawdopodobieństwem 0,14 uzyska co najmniej 14 punktów, czyli ocenę wyższą niż dostateczna, w tym z prawdopodobińštwem zaledwie 0,0142 liczbę punktów co najmniej 16, czyli ocenę dobrą lub wyżej.

Student S_1, który potrafi wykluczyć w 12 pytaniach jedną odpowiedź z prawdopodobieństwem 0,45 uzyska mniej niż 12 punktów, z prawdopodobieństwem 0,21 pomiędzy 12 i 14 punktów oraz z prawdopodobieństwem 0,39 wynik co najmniej 14 punktów (ocena co najmniej 3+) w tym z prawdopodobieństwem 0,06 ocenę dobrą (co najmniej 16 punktów).

Student S_2, który potrafi wykluczyć w 12 pytaniach dwie odpowiedzi z prawdopodobieństwem 0,07 uzyska mniej niż 12 punktów, z prawdopodobieństwem 0,21 pomiędzy 12 i 14 punktów oraz z prawdopodobieństwem 0,80 wynik co najmniej 14 punktów (ocena co najmniej 3+) w tym z prawdopodobieństwem 0,38 ocenę co najmniej dobrą (co najmniej 16 punktów).

Zapiszmy te dane w poniższej tabeli dające rozkład zmiennej losowej O odpowiadającej ocenom. W pierwszym wierszu podane są zdarzenia, w następnych ich prawdopodobieństwa.

Tabela 3

O	2	3	3,5	4	4,5	5
Dla S_0	0,65	0,19	0,15	0,011	0,003	0,00004
Dla S_1	0,39	0,23	0,30	0,048	0,019	0,00054
Dla S_2	0,07	0,12	0,42	0,19	0,19	0,019

W następnej symulacji zakładamy, że studenci S_0, S_1 i S_2 znają odpowiedzi na 13 pytań, a w pozostałych potrafią analogicznie odrzucić odpowiednio jedną i dwie odpowiedzi. Wyniki otrzymujemy w tabelach. Ograniczamy się od tej chwili do przypadku $s = 1$:

Tabela 4

P_0	P_1	P_2	d	w_1
0,04	0,012	0,0005	13	9,15
0,15	0,06	0,005	14	10,50
0,26	0,16	0,03	15	11,85
0,26	0,24	0,08	16	13,20
0,17	0,24	0,16	17	14,55
0,08	0,17	0,23	18	15,90
0,03	0,08	0,23	19	17,25
0,006	0,03	0,16	20	18,60
0,001	0,007	0,08	21	19,95
0,0001	0,0012	0,03	22	21,30
$8 \cdot 10^{-6}$	0,00012	0,005	23	22,65
$2 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-6}$	0,0005	24	24,00

A oto tabela 5 analogiczna do tabeli 3 prezentująca rozkład zmiennej losowej O.

Widzimy, że w tym wypadku student S_2 ma duże szanse „poprawić” się na ocenę dobrą a nawet na dobrą plus.

W kolejnej symulacji zakładamy, że studenci S_0, S_1 i S_2 znają odpowiedzi na 16 pytań.

Tabela 5

O	2	3	3,5	4	4,5	5
Dla S_0	0,45	0,26	0,25	0,03	0,001	0,0001
Dla S_1	0,23	0,24	0,40	0,12	0,003	0,00013
Dla S_2	0,033	0,08	0,39	0,39	0,11	0,0,03

Tabela 6

P_0	P_1	P_2	d	w_1
0,10	0,04	0,004	16	13,20
0,27	0,16	0,03	17	14,55
0,31	0,27	0,11	18	15,90
0,21	0,27	0,22	19	17,25
0,09	0,17	0,27	20	18,60
0,023	0,07	0,22	21	19,95
0,004	0,02	0,11	22	21,30
0,0004	0,002	0,03	23	22,65
0,000015	0,00015	0,004	24	24,00

Analizując tę sytuację widzimy po pierwsze, że nie można sobie pogorszyć oceny poniżej 3. Student S_0, czyli ten, który skreśla pozostałe 8 pytan zupełnie losowo ma prawdopodobieństwo 0,68, że sobie „pogorszy” ocenę, a tylko 0,15, że sobie poprawi. Student S_2 prawdopodobieństwo 0,43, że sobie pogorszy a 0,26, że poprawi. To na pierwszy rzut oka wygląda na sprzeczność z założeniem, że studentowi temu powinno się już opłacić zaznaczać odpowiedzi. Jednak sprzeczności w tym nie ma. Liczba punktów wyliczona za 18 dużych punktów jest minimalnie pod granicą 16 punktów, od której hipotetycznie jest stawiana ocena dobra. Gdyby minimalnie zmodyfikować tę granicę np. na 15,90 to już te prawdopodobieństwa byłyby odpowiednio 0,19 i 0,26 i już „opłaciłoby się” zaznaczać odpowiedzi. Natomiast student S_2 ma prawdopodobieństwo $0,63$, że ocenę poprawi, natomiast tylko 0,18, że pogorszy.

We wszystkich trzech symulacyjnych sytuacjach widzimy, że studenci S_1 i S_2, którzy zaryzykują mogą zostać ukarani za „brak szczęścia”. W wypadku dwóch pierwszych symulacji prawdopodobieństwo, że wynik będzie niższy niż 12 punktów wydaje się zbyt duże. Sugeruje to wprowadzenie pewnej korekty, np. że za 50% dużych punktów otrzymuje się ocenę dostateczną niezależnie od liczby punktów wyliczonych po zastosowaniu proponowanego algorytmu. Można też ustawić dolną granicę na ocenę dostateczną na 11,85 punktów,

Tabela 7

O	3	3,5	4	4,5	5
Dla S_0	0,10	0,58	0,21	0,11	0,04
Dla S_1	0,04	0,43	0,27	0,24	0,02
Dla S_2	0,004	0,14	0,22	0,49	0,14

wtedy prawdopodobieństwo „pecha” w wypadku studenta S_1 wyniesie tylko 0,18, a studenta S_2 wyniesie 0,02, albo wręcz ustawić tę granicę na 10,50 – wtedy te prawdopodobieństwa wyniosą odpowiednio 0,05 i 0,0032.

Oczywiście nie zawsze będziemy mieli do czynienia ze studentami dokładnie typu S_0, S_1 i S_2. Zwykle student niektóre zadania rozwiąże całkowicie poprawnie, niektóre zostawi nierozwiązane, a co do niektórych nie będzie pewien odpowiedzi, ale postanowi zaryzykować. Rozpatrzmy na przykład studenta, który zna odpowiedzi na 12 pytań, z pozostałych dwunastu zostawi niezakreślonych 4, w 3 zaryzykuje nie znając nic, w dalszych trzech zaryzykuje i potrafi wykluczyć jedną odpowiedź i w ostatnich dwóch zaryzykuje potrafiąc wykluczyć dwie odpowiedzi. Zmienna losowa d opisująca zdobyte przez niego duże punkty może przyjmować wartości od 12 do 20 punktów, przy czym na przykład aby uzyskać 14 punktów musi „trafić” 2 razy. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wyniesie więc

$$b\left(\tfrac{1}{4},3,0\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{3},3,0\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{2},2,2\right)+b\left(\tfrac{1}{4},3,0\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{3},3,1\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{2},2,1\right)$$
$$+b\left(\tfrac{1}{4},3,0\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{3},3,2\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{2},2,0\right)+b\left(\tfrac{1}{4},3,1\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{3},3,0\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{2},2,1\right)$$
$$+b\left(\tfrac{1}{4},3,1\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{3},3,1\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{2},2,0\right)+b\left(\tfrac{1}{4},3,2\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{3},3,0\right)\cdot b\left(\tfrac{1}{2},2,0\right)\approx 0,27.$$

Jak widzimy wyliczenie pełnego rozkładu zmiennej d jest dosyć żmudne. Na szczęście autor mógł posłużyć się gotowym programikiem napisanym w pascalu dwadzieścia parę lat temu do celów dydaktycznych i szczęśliwie zachowanym. Oto on:

```
var nn,k1,k2,k3,n1,n2,n3,j,i,n,k,l:integer;
x,y,h,g,e,f,a,b,c,d,p1,p2,p3:real;
plik:text; aa:array[0..100] of real;
function bin(var n,k:integer; p:real):real;
begin a:=0; for i:=1 to n do
begin a:=a+ln(i);end; b:=0;
for i:=1 to k do begin b:=b+ln(i);end; c:=0;
```

```
for i:=1 to n-k do begin c:=c+ln(i);end;
d:=a-b-c;e:=k*ln(p);f:=(n-k)*ln(1-p);
g:=d+e+f;bin:=exp(g);end;
begin
assign(plik,'wyniki'); rewrite(plik);
writeln('podaj n1,n2,n3');
read(n1,n2,n3); nn:=n1+n2+n3;
writeln('podaj p1,p2,p3'); read(p1,p2,p3);
for k1:=0 to 100 do begin
aa[k1]:=0;end;
for k1:=0 to n1 do begin
for k2:=0 to n2 do begin
for k3:=0 to n3 do begin
x:=bin(n1,k1,p1)*bin(n2,k2,p2)*bin(n3,k3,p3);
for l:=0 to nn do begin
if k1+k2+k3=l then begin aa[l]:=aa[l]+x;
end;end;end;end;end;
for l:=0 to nn do begin
writeln(plik,l,'--',aa[l]:4:6);
end.
```

Wystarczyło go uruchomić, wybrać $n1 = 3$, $n2 = 3$, $n3 = 2$, $p1 = 0.25$, $p2 = 0.333333333$, $p3 = 0.5$ otrzymując plik `wyniki` w postaci[2]

```
0--0.031250
1--0.140625
2--0.268229
3--0.283709
4--0.182436
5--0.073206
6--0.017940
7--0.002459
8--0.000145.
```

[2]Do otrzymania poprzednich rozkładów też można było użyć tego programu wstawiając: dla studenta S_0: $n2 = n3 = 0$ oraz $n1 = 12$ w symulacji 1, $n1 = 11$ w symulacji 2, $n1 = 8$ w symulacji 3; dla studenta S_1: $n1 = n3 = 0$ oraz $n2 = 12$ w symulacji 1, $n2 = 11$ w symulacji 2, $n2 = 8$ w symulacji 3; dla studenta S_2: $n1 = n2 = 0$ oraz $n3 = 12$ w symulacji 1, $n3 = 11$ w symulacji 2, $n3 = 8$ w symulacji 3. Ale można też było skorzystać z arkusza kalkulacyjnego, który „obsługuje" rozkład Bernoulliego.

Łatwo stąd otrzymujemy potrzebny rozkład: prezentujemy go w poniższej tabeli (podobnie jak poprzednio zaokrąglamy prawdopodobieństwa):

Tabela 8

S	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p	0,03	0,14	0,27	0,28	0,18	0,07	0,02	0,002	0,0001

Student, który zdobył d dużych punktów ma małych punktów

$$4d + 3 \cdot 4 + 2 \cdot (24 - 4 - d).$$

Wtedy rozkłady odpowiadające małym punktom oraz wynikowi wyglądają następująco:

Tabela 9

m	76	78	80	82	84	86	88	90	92
w_1	9,20	10,55	11,90	13,25	14,60	15,95	17,30	18,652	20,00
p	0,03	0,14	0,27	0,28	0,18	0,07	0,02	0,002	0,0001

A oto rozkład odpowiadający ocenom przy postulowanych progach:

Tabela 10

Oceny	2	3	3,5	4	4,5	5
p	0,44	0,28	0,25	0,02	0,002	0,0001

Ten przykład potwierdza, że wydaje się zasadne wprowadzenie proponowanej wcześniej korekty.

Poniżej prezentowany jest program napisany w TeX-u, wyliczający wszystkie możliwe wyniki dla danych n, k i s. Warto zwrócić uwagę na polecenie `\usun` dzięki któremu długość może być wykorzystywana jako ułamek dziesiętny oraz `\uSUN` zaokrąglająca te ułamki do dwóch miejsc po przecinku.

```
\documentclass{article}
\usepackage{ifthen}
\usepackage{multicol}
\newdimen\wynik\newcount\stp\newcount\duze
\newcount\male\newcount\zle\newcount\ilepyt
\newcount\ileodp\newcount\mini\newcount\aa
```

```
\newcount\maks\newdimen\xx\newdimen\xy
\newcount\xw\newcount\xv\newcount\xu
\def\uSUN#1.#2#3#4#5#6#7;;{#1{,}#2#3}
\def\usunpt{\expandafter\USUN\the}
{\catcode`p=12 \catcode`t=12
\gdef\USUN#1pt{\uSUN#1{}{}{}{}{}{}{};;}}
\begin{document}
\aa=0
\whiledo{\aa<40}
{\immediate\write16{ }\advance\aa1}
\immediate\write16{Podaj liczbe pytan - n}
\read-1 to\ilepyt
\immediate\write16{Podaj liczbe odpowiedzi na pytanie - k}
\read-1 to\ileodp
\immediate\write16{Podaj stopien zniechecania
do losowego skreslania - s(0-10)}
\read-1 to\stp
\aa=\ileodp\advance\aa-2
\xx=1pt\xy=1pt
\divide\xx-\aa
\xy=1pt{}\advance\aa1\divide\xy\aa
\advance\xx\xy\multiply\xx\stp
\divide\xx10
\xy=1pt\divide\xy-\aa
\advance\xx\xy
\def\wylicz#1#2{\duze=#1
\male=#2{}\zle=\ilepyt\multiply\zle\aa
\advance\zle\duze
\advance\zle-\male
\wynik=\duze pt
\xy=\xx\multiply\xy\zle
\advance\wynik\xy}
\xw=-1
\whiledo{\xw<\ilepyt}
{\advance\xw1
\mini=\ileodp\multiply\mini\xw
\xv=\ilepyt\advance\xv-\xw
\xu=\ileodp\advance\xu-2
\multiply\xv\xu
\advance\mini\xv
```

```
\maks=\mini\advance\maks\ilepyt\advance\maks-\xw
\xu=\mini\advance\xu-1
\columnseprule=0.4pt
\begin{multicols}{6}
\parindent=0em
\par
\whiledo{\xu<\maks}{\advance\xu1\wylicz{\xw}{\xu}
$w({\bf\the\duze,\the\xu)= \usunpt\wynik$
\\
}
\end{multicols}
}
\end{document}
```

Po skompilowaniu go dla $n = 10$, $k = 4$, $s = 1$ otrzymamy wydruk ($w(d, m)$ oznacza wyliczony wynik dla d dużych i m małych punktów.

$w(\mathbf{0}, 20) = -3{,}49$
$w(\mathbf{0}, 21) = -3{,}14$
$w(\mathbf{0}, 22) = -2{,}79$
$w(\mathbf{0}, 23) = -2{,}44$
$w(\mathbf{0}, 24) = -2{,}09$
$w(\mathbf{0}, 25) = -1{,}74$
$w(\mathbf{0}, 26) = -1{,}39$
$w(\mathbf{0}, 27) = -1{,}04$
$w(\mathbf{0}, 28) = -0{,}69$
$w(\mathbf{0}, 29) = -0{,}34$
$w(\mathbf{0}, 30) = 0{,}0$
$w(\mathbf{1}, 22) = -2{,}14$
$w(\mathbf{1}, 23) = -1{,}79$
$w(\mathbf{1}, 24) = -1{,}44$
$w(\mathbf{1}, 25) = -1{,}09$
$w(\mathbf{1}, 26) = -0{,}74$
$w(\mathbf{1}, 27) = -0{,}39$
$w(\mathbf{1}, 28) = -0{,}04$
$w(\mathbf{1}, 29) = 0{,}30$
$w(\mathbf{1}, 30) = 0{,}65$
$w(\mathbf{1}, 31) = 1{,}0$
$w(\mathbf{2}, 24) = -0{,}79$
$w(\mathbf{2}, 25) = -0{,}44$
$w(\mathbf{2}, 26) = -0{,}09$
$w(\mathbf{2}, 27) = 0{,}25$
$w(\mathbf{2}, 28) = 0{,}60$
$w(\mathbf{2}, 29) = 0{,}95$
$w(\mathbf{2}, 30) = 1{,}30$
$w(\mathbf{2}, 31) = 1{,}65$
$w(\mathbf{2}, 32) = 2{,}0$
$w(\mathbf{3}, 26) = 0{,}55$
$w(\mathbf{3}, 27) = 0{,}90$
$w(\mathbf{3}, 28) = 1{,}25$
$w(\mathbf{3}, 29) = 1{,}60$
$w(\mathbf{3}, 30) = 1{,}95$
$w(\mathbf{3}, 31) = 2{,}30$
$w(\mathbf{3}, 32) = 2{,}65$
$w(\mathbf{3}, 33) = 3{,}0$
$w(\mathbf{4}, 28) = 1{,}90$
$w(\mathbf{4}, 29) = 2{,}25$
$w(\mathbf{4}, 30) = 2{,}60$
$w(\mathbf{4}, 31) = 2{,}95$
$w(\mathbf{4}, 32) = 3{,}30$
$w(\mathbf{4}, 33) = 3{,}65$
$w(\mathbf{4}, 34) = 4{,}0$
$w(\mathbf{5}, 30) = 3{,}25$
$w(\mathbf{5}, 31) = 3{,}60$
$w(\mathbf{5}, 32) = 3{,}95$
$w(\mathbf{5}, 33) = 4{,}30$
$w(\mathbf{5}, 34) = 4{,}65$
$w(\mathbf{5}, 35) = 5{,}0$
$w(\mathbf{6}, 32) = 4{,}60$
$w(\mathbf{6}, 33) = 4{,}95$
$w(\mathbf{6}, 34) = 5{,}30$
$w(\mathbf{6}, 35) = 5{,}65$
$w(\mathbf{6}, 36) = 6{,}0$
$w(\mathbf{7}, 34) = 5{,}95$
$w(\mathbf{7}, 35) = 6{,}30$
$w(\mathbf{7}, 36) = 6{,}65$
$w(\mathbf{7}, 37) = 7{,}0$
$w(\mathbf{8}, 36) = 7{,}30$
$w(\mathbf{8}, 37) = 7{,}65$
$w(\mathbf{8}, 38) = 8{,}0$
$w(\mathbf{9}, 38) = 8{,}65$
$w(\mathbf{9}, 39) = 9{,}0$
$w(\mathbf{10}, 40) = 10{,}0$

Jeśli zdecydujemy się na wprowadzenie proponowanej powyżej korekty w postaci dolnej granicy dużych punktów, za które egzamin jest zaliczony niezależnie od końcowych wyliczeń, należy kod uzupełnić w odpowiednich miejscach o następujące linie:

```
\newcount\minim
```

```
\newdimen\minimp
\immediate\write16{Podaj minimalna granice duzych
punktow za ktora jest zaliczenie}
\read-1 to\minim
\minimp=\minim pt
\ifnum\duze<\minim{}\else
\ifdim\wynik<\minimp
\wynik=\minimp\else\fi\fi
```

Po wprowadzeniu tych linii otrzymamy dla takich samych danych ($n = 10$, $k = 4$, $s = 1$) następujący wydruk:

$w(\mathbf{0}, 20) = -3{,}49$	$w(\mathbf{1}, 28) = -0{,}04$	$w(\mathbf{3}, 30) = 1{,}95$	$w(\mathbf{6}, 32) = 5{,}0$
$w(\mathbf{0}, 21) = -3{,}14$	$w(\mathbf{1}, 29) = 0{,}30$	$w(\mathbf{3}, 31) = 2{,}30$	$w(\mathbf{6}, 33) = 5{,}0$
$w(\mathbf{0}, 22) = -2{,}79$	$w(\mathbf{1}, 30) = 0{,}65$	$w(\mathbf{3}, 32) = 2{,}65$	$w(\mathbf{6}, 34) = 5{,}30$
$w(\mathbf{0}, 23) = -2{,}44$	$w(\mathbf{1}, 31) = 1{,}0$	$w(\mathbf{3}, 33) = 3{,}0$	$w(\mathbf{6}, 35) = 5{,}65$
$w(\mathbf{0}, 24) = -2{,}09$	$w(\mathbf{2}, 24) = -0{,}79$	$w(\mathbf{4}, 28) = 1{,}90$	$w(\mathbf{6}, 36) = 6{,}0$
$w(\mathbf{0}, 25) = -1{,}74$	$w(\mathbf{2}, 25) = -0{,}44$	$w(\mathbf{4}, 29) = 2{,}25$	$w(\mathbf{7}, 34) = 5{,}95$
$w(\mathbf{0}, 26) = -1{,}39$	$w(\mathbf{2}, 26) = -0{,}09$	$w(\mathbf{4}, 30) = 2{,}60$	$w(\mathbf{7}, 35) = 6{,}30$
$w(\mathbf{0}, 27) = -1{,}04$	$w(\mathbf{2}, 27) = 0{,}25$	$w(\mathbf{4}, 31) = 2{,}95$	$w(\mathbf{7}, 36) = 6{,}65$
$w(\mathbf{0}, 28) = -0{,}69$	$w(\mathbf{2}, 28) = 0{,}60$	$w(\mathbf{4}, 32) = 3{,}30$	$w(\mathbf{7}, 37) = 7{,}0$
$w(\mathbf{0}, 29) = -0{,}34$	$w(\mathbf{2}, 29) = 0{,}95$	$w(\mathbf{4}, 33) = 3{,}65$	$w(\mathbf{8}, 36) = 7{,}30$
$w(\mathbf{0}, 30) = 0{,}0$	$w(\mathbf{2}, 30) = 1{,}30$	$w(\mathbf{4}, 34) = 4{,}0$	$w(\mathbf{8}, 37) = 7{,}65$
$w(\mathbf{1}, 22) = -2{,}14$	$w(\mathbf{2}, 31) = 1{,}65$	$w(\mathbf{5}, 30) = 5{,}0$	$w(\mathbf{8}, 38) = 8{,}0$
$w(\mathbf{1}, 23) = -1{,}79$	$w(\mathbf{2}, 32) = 2{,}0$	$w(\mathbf{5}, 31) = 5{,}0$	$w(\mathbf{9}, 38) = 8{,}65$
$w(\mathbf{1}, 24) = -1{,}44$	$w(\mathbf{3}, 26) = 0{,}55$	$w(\mathbf{5}, 32) = 5{,}0$	$w(\mathbf{9}, 39) = 9{,}0$
$w(\mathbf{1}, 25) = -1{,}09$	$w(\mathbf{3}, 27) = 0{,}90$	$w(\mathbf{5}, 33) = 5{,}0$	$w(\mathbf{10}, 40) = 10{,}0$
$w(\mathbf{1}, 26) = -0{,}74$	$w(\mathbf{3}, 28) = 1{,}25$	$w(\mathbf{5}, 34) = 5{,}0$	
$w(\mathbf{1}, 27) = -0{,}39$	$w(\mathbf{3}, 29) = 1{,}60$	$w(\mathbf{5}, 35) = 5{,}0$	

W pracy [4] omawiany jest program do przetwarzania wyników testu również napisany w TeX-u. Wystarczy ten program uzupełnić odpowiednio o powyższy kod otrzymując gotowe wyniki z zastosowaniem proponowanego algorytmu.[3]

[3]Można jeszcze ten program uzupełnić o wyliczenia dostosowujące progi ocen pozytywnych do wymagań sugerowanych przez Europejski System Transferu i Akumulacji Punktów (ECTS) ([6]) to znaczy po 10% ocen A i E (u nas 5 i 3), po 25% ocen B i D (u nas 4,5 i 3,5) oraz 30% ocen C (u nas 4).

3. Podsumowanie

Przedstawiona propozycja obliczania wyników z pewnością nie jest jedyną i niekoniecznie musi być najlepsza. Bezkrytyczne stosowanie jakiegokolwiek algorytmu do oceniania wyników egzaminu niesie niebezpieczeństwo, że ktoś może zostać skrzywdzony. Zawsze ostateczną decyzję o metodzie oceniania, czy ustawieniu progów ocen musi podejmować egzaminator biorąc pod uwagę różne aspekty: jak trudność i stopień skomplikowania zadań, czas egzaminu, możliwość korzystania z pomocy, wzmiankowany w przypisie postulowany rozkład itp. Użycie metody informatycznej pozwala szybko modyfikować np. progi ocen w trakcie przetwarzania wyników egzaminu. Nie zawsze egzaminator przed egzaminem prawidłowo oceni skalę trudności zadań i może pojawić się konieczność obniżenia lub podwyższenia wcześniej zakładanych wymogów.

Bibliografia

[1] Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowski K, Wasilewski W, (2000); *Rachunek prawdopodobieństawa i statystyka matematyczna w zadaniach*, PWN

[2] Krysicki W., Włodarski L. (2000), Analiza matematyczna w zadaniach, PWN

[3] Rusinek J., (2007); *Algorytm permutowania w TeX-u zastosowany do informatyzacji procesu egzaminacyjnego*, „Rocznik Naukowy Wydziału Zarządzania w Ciechanowie”, 1-4 (I), (153-174)

[4] Rusinek J., (2008); *Pliki do odczytu i zapisu w TeX-u – zastosowanie do przetwarzania wyników egzaminu* , „Rocznik Naukowy Wydziłu Zarządzania w Ciechanowie”, 1-2 (II), (107-124)

[5] Rusinek J., (2009); *Testy egzaminacyjne z matematyki*, „Rocznik Naukowy Wydziału Zarządzania w Ciechanowie”, 3-4 (III), (101-111)

[6] (2009); *Europejski System Transferu i Akumulacji Punktów, przewodnik użytkownika*, Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji `ekspercibolonscy.org.pl/sites/ekspercibolonscy.org.pl/files/przewodnik_ECTS_2009_pol.pdf`