

Leszek Sidz

ZAGADNIENIE STEROWALNOŚCI DLA RÓWNAŃ LAME

[**Słowa kluczowe:** równanie Lamé, sterowalność]

Streszczenie.

W pracy rozważane jest zagadnienie sterowalności dla równań różniczkowych cząstkowych. Dokładniej omówiony jest problem sterowalności dla anizotropowego układu Lamé o zmiennych współczynnikach. Podane są rezultaty aproksymatywnej sterowalności i dokładnej sterowalności przy dodatkowych założeniach geometrycznych.

1. Wstęp

W pracy tej omówiony jest problem sterowalności dla układu równań Lamé. Problem sterowalności polega ogólnie na takim zadaniu wymuszenia, tzn. warunków początkowych, brzegowych lub siły obciążającej, aby w ustalonej chwili uzyskać żądany, n.p. zerowy stan układu. Dziedzina ta rozwinęła się istotnie w ciągu ostatnich lat, dzięki zastosowaniu nowego aparatu matematycznego i ma duże znaczenie praktyczne.

Na wstępie rozważmy przykład równania struny:

$$u_{tt} - u_{xx} = v(t)\delta(x - a) \quad \text{dla } x \in [0, 1]$$

z zerowymi warunkami brzegowymi i pewnymi warunkami początkowymi. Chcemy znaleźć funkcję wymuszającą $v(t)$ tak, aby w czasie T struna była w spokoju. Po zastosowaniu transformaty Fouriera zadanie sprowadza się do znalezienia funkcji całkowitej $w(t)$ takiej, że

$$w(z_k) = w(\pi k) = -\frac{\sin k\pi\xi}{\sin k\pi a}$$

dla $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Stąd widać, że punkty wymierne a są punktami niesterowalności, tzn. takiej funkcji $v(t)$ nie znajdziemy. Sens fizyczny tego jest taki, że gdy chcemy sterować w punkcie, będącym węzłem, to nie potrafimy zgasić drgań zawierających harmonikę odpowiadającą temu węzłowi. Jednak to nie jest takie proste, istnieją punkty niewymierne, w których sterowalność też jest

niemożliwa, np. punkty Liouville’a. Punktami sterowalności będą natomiast niewymierne punkty algebraiczne.

Analogiczna sytuacja zachodzi w układach równań, ważne jest, w jakiej części obszaru zadajemy wymuszenie, n.p. sterowalność równaniem Schrodingera w obszarze M jest możliwa przy zadaniu wymuszenia w podobszarze D , jeżeli D spełnia warunek:

Istnieje $L(D) \subset (0, \infty)$ taki, że dla każdego $x \in M - D$ każda geodezyjna uogólniona, wychodząca z x przecina D w skończonym czasie i długość jej łuku od x do punktu przecięcia jest zawarta w $L(D)$.

Przedstawimy teraz rezultaty, dotyczące układu równań Lamé.

Niech $G \subset R^3$ będzie ograniczonym obszarem z brzegiem klasy C^2 , $\bar{G}$ jest rozmaitością z brzegiem. Rozważamy układ sprężystości

$$\rho(x)\partial_t^2 u - L(x, \partial_x)u = 0 \quad ; \quad (t, x) \in (a, b) \times G, \quad (1.1)$$

gdzie

$$(L(x, \partial_x)u)_k = \sum_{l=1}^3 \partial_l \sigma_{kl}(u), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_{kl}(u) = \sum_{i,j=1}^3 a_{klij}(x) \epsilon_{ij}(u),$$

$$\epsilon_{kl}(u) = \frac{1}{2}(\partial_k u_l + \partial_l u_k).$$

Zakładamy, że $\rho > 0$ oraz tensor $a_{ijkl}(\cdot)$ spełnia zwykłe warunki symetrii oraz ścisłej eliptyczności [7]. W przypadku izotropowym mamy

$$a_{ijkl} = \lambda(x)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Zakładamy, że $\lambda, \mu > 0$ na $\bar{G}$. Odpowiednią regularność współczynników będziemy zakładali później. Oznaczamy układ (1.1) przez (1.1i) w przypadku izotropowym.

Rozważamy następujące warunki początkowo-brzegowe:

$$u(a) = u^0, \quad \partial_t u(a) = u^1, \quad \text{na } G, \quad (1.2)$$

$$u = f, \quad \text{na } (a, b) \times \partial G. \quad (1.3)$$

Gdy w (1.3) $f = 0$, oznaczamy warunek przez (1.3)₀. Dla $(u^0, u^1) \in H$, $H = (H_0^1(G)^3 \times L^2(G)^3)$ mamy istnienie i jednoznaczność rozwiązania $(u, \partial_t u) \in C([a, b]; H)$ problemu (1.1), (1.2), (1.3)₀. ([7], [10]). Gdy dodatkowo $(u^0, u_1) \in$

$H^* := (H_0^1(G)^3 \cap H^2(G)^3) \times H^1(G)^3$, to
 $(u, \partial_t u) \in C([a, b]; (H^2(G)^3 \cap H_0^1(G)^3) \times H^1(G)^3)$. ([7]). Ponadto zachodzi zasada zachowania energii: $En(u; t) = En(u; a)$, $t \in (a, b]$, gdzie

$$En(u; t) = \frac{1}{2} \int_G (\rho |\partial_t u(t)|^2 + \sum_{k,l=1}^3 \sigma_{kl}(u(t)) \epsilon_{kl}(u(t))) dx,$$

jeżeli u jest rozwiązaniem (1.1), (1.2), (1.3)₀ z warunkami $(u^0, u^1) \in H$. Ważnym rezultatem jest ciągłość operatora [13]:

$$(u^0, u^1) \in H \rightarrow \sigma(u(\cdot))\nu \in L^2([a, b] \times \partial G)^3, \quad (1.4)$$

gdzie $(\sigma(u)\nu)_k = \sum_{l=1}^3 \sigma_{kl}(u)|_{[a,b] \times \partial G} \nu_l$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ jest zewnętrznym wektorem normalnym do ∂G . Pozwoli to nam uzyskać istnienie i jednoznaczność w słabszym sensie dla:

$$(u^1, u^0) \in X = (H^{-1}(G)^3 \times L^2(G)^3), \quad f \in L^2([a, b] \times \partial G).$$

Definicja 1.1. Mówimy, że układ (1.1) ma własność aproksymatywnej sterowalności z brzegu warunkiem Dirichleta na $[0, T] \times G$, jeżeli zbiór

$$\{(\partial_t w^f(T), w^f(T)) : f \in C([0, T], L^2(\partial G))^3, f(0) = 0\}$$

jest gęsty w X , gdzie w^f jest rozwiązaniem problemu (1.1), (1.2), (1.3) z $u^0 = u^1 = 0$ i $w^f = f$ na $[0, T] \times \partial G$.

2. Zasada jednoznacznego przedłużania dla układu sprężystości

W rozdziale tym podana będzie zasada jednoznacznego przedłużania, która jest kluczowym rezultatem dla dowodu aproksymatywnej sterowalności. Dowód przeprowadzony jest w kilku krokach. Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$A(u, v) := \langle \sigma_{ij}(u), \epsilon_{ij}(v) \rangle_G = \int_G a_{ijkl} \partial_i u_j \partial_k v_l dx.$$

oraz

$$H := \langle h, \nabla \rangle = h_m \partial_m, \quad h(x) = x - x^0.$$

Zauważmy, że

$$\epsilon(Hv) = \epsilon(v) + H\epsilon(v), \quad \epsilon(v) = \{\epsilon_{kl}(v); k, l = 1, 2, 3\},$$

i stąd

$$A(v, Hv) = A(v, v) + \frac{1}{2} \int_G a_{ijkl} H(\partial_i v_j \partial_k v_l) dx.$$

Własność $P_{\pm}$:

Mówimy, że funkcja f ma własność P_+ (piszemy $f \in P_+$) (lub P_- i piszemy $f \in P_-$), jeżeli istnieje stała $C > 0$ taka, że $f + Hf \geq Cf$ on G ($f - Hf \geq Cf$ on G).

Własność P .

Mówimy, że (a_{ijkl}) ma własność P (oznaczamy $a_{ijkl} \in P$), jeżeli istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$(a_{ijkl}(x) - (Ha_{ijkl})(x))\xi_{ij}\xi_{kl} \geq Ca_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl}$$

dla $x \in G$ i symetrycznego tensora $(\xi_{nn}) \in R^3 \times R^3$.

Lemat 2.1.

Niech $\rho \in P_+$, $(a_{ijkl} \in P$ and $\rho, a_{ijkl} \in C^3(G)$. Wtedy rozwiązanie u (1.1) takie, że $(u, \partial_t u) \in C([r, s]; H^*)$ spełnia nierówność

$$(s - r)E(u; r) \leq C(E(u; r) + \|\nabla_x u\|_{\Sigma_{r,s}}^2), \quad (2.1)$$

$C > 0$ nie zależy od r, s i u .

Z twierdzenia o regularności śladu ([9] twierdzenie 4.1), lematu 2.1 oraz oszacowania

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Sigma_{r,s})}^2 \leq \|\sigma(u)\nu\|_{L^2(\Sigma_{r,s})}^2 + \sum_{k=1}^2 \|\nabla u \tau_k\|_{L^2(\Sigma_{r,s})}^2.$$

dostajemy

Wniosek 2.2. $\rho, \lambda, \mu \in C^\infty(G)$, $\rho \in P_+$, $\lambda, \mu \in P_-$. Niech u będzie rozwiązaniem (1.1i) na Q_T , $(u, \partial_t u) \in C([0, T], H)$ i $u = 0$ w otoczeniu Σ_T . Wtedy dla dowolnego $r, s \in (0, T)$, $r < s$ zachodzi

$$(r - s)En(u; 0) \leq CEn(u; 0) + C(r, s) \int_0^T \|u(t)\|_{H^{1-\epsilon}(G)}^2 dt,$$

dla $\partial G_1 \in C^\infty$ i $u = 0$ w otoczeniu ∂G_1 .

Stąd dostajemy zasadę jednoznacznego przedłużania.

Twierdzenie 2.3. Niech ρ, λ, μ będą jak we Wniosku 3.4. Wtedy istnieje $T_0 > 0$ takie, że dla $T > T_0$, jeżeli u spełnia (1.1i) na $G \times [0, T]$ i $(u, \partial_t u) \in C([0, T], H)$, $u = 0$ w otoczeniu Σ_T to $u = 0$ na Q_T .

3. Aproksymatywna sterowalność

Dla dalszych potrzeb musimy zdefiniować słabsze rozwiązanie (1.1), (1.2), (1.3).

Definicja 3.1. $w : [0, T] \times G \rightarrow R^3$ takie, że $(\partial_t w, w) \in C([0, T], X)$ spełnia zagadnienie (1.1), (1.2), (1.3) z warunkami $(w^1, w^0) \in X$, $f \in L^2([0, T] \times \partial G)$ w słabym sensie, jeżeli dla dowolnego $(u^0, u^1) \in H$ zachodzi

$$\langle (-\partial_t w(s), w(s)), (u(s), \partial_u(s)) \rangle_{(X, H)} =$$

$$\langle (-w^1, w^0), (u^0, u^1) \rangle_{(X, H)} + \int_{[0, s] \times \partial G} f \sigma(u) \nu d\sigma dt, \quad s \in [0, T], \quad (3.1)$$

gdzie u spełnia (1.10), (1.2), (1.3)₀ z (u^0, u^1) . Oznaczamy tu przez $\langle, \rangle_{(X, H)}$ parę dualną między H i X .

Twierdzenie 3.2. Dla dowolnego $(w^1, w^0) \in X$, $f \in L^2([0, T] \times \partial G)$ zagadnienie (1.1) < (1.2), (1.3) ma jednoznaczne rozwiązanie w .

Możemy przytoczyć główny rezultat

Twierdzenie 3.3. Niech ρ, λ, μ spełniające założenia z wniosku 2.2. Wtedy istnieje $T_0 > 0$ takie, że dla każdego $T > T_0$ układ (1.1i) jest aproksymatywnie sterowalny warunkiem Dirichleta z brzegu.

Dowód

Założmy nie wprost, że zbiór

$$\{(\partial_t w^f(T), w^f(T)) : f \in C([0, T], L^2(\partial G)), f(0) = 0\}$$

nie jest gęsty w X (tu w^f jest jak w definicji 1.1.).

Zatem istnieje $0 \neq (\phi, \psi) \in H$ takie, że

$$\langle (\partial_t w^f(T), w^f(T)), (-\phi, \psi) \rangle_{(X, H)} = 0 \quad (3.2)$$

dla każdego $f \in C([0, T], L^2(\partial G))$, $f(0) = 0$. Ale wtedy problem dualny z warunkami początkowymi w T równymi ϕ, ψ na mocy poprzednich twierdzeń miałby zerowe rozwiązanie.

Sprzeczność z warunkiem $(\phi, \psi) \neq 0$.

4. Rezultat o jednym pomiarze

Ciekawym rezultatem jest też twierdzenie o jednym pomiarze.

Oznaczmy przez R^S operator Dirichlet to Neumann dla problemu (1.1) na odcinku $[0, S]$, to znaczy

$$R^S : f \rightarrow \sigma(u^f(t))\nu,$$

gdzie ν jest zewnętrznym wersorem normalnym do brzegu G ,

a $f \in H_0^1([0, S] \times \delta G)$. Wtedy

Twierdzenie 4.1. Dla każdego $S > 0$ istnieje $f \in H_{loc}^1(R \times \delta G)$, $f(0) = 0$ takie, że wartość $\sigma(u^f(t))\nu$, $t \in [0, +\infty)$ wyznacza operator R^S przy dowolnym $t > 0$.

Dowód.

Niech dla $t_0 > 0$ f_j będzie bazą ortonormalną w $H_0^1([0, t_0] \times \delta G)$. Niech (g_j) będzie ciągiem, w którym f_j występuje nieskończenie wiele razy. Połóżmy:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{cn^2} g_n(x, t - nt_0).$$

Z oszacowania energetycznego

$$\|e^{-cn^2} \sigma(u^f)(t + nt_0, x) \nu_{[0, t_0] \times \delta G} - (R^{t_0} g_n(t, x))\| \leq c' n e^{-c'' nt_0}.$$

Biorąc $n \rightarrow +\infty$ dostajemy tezę.

5. Dokładna sterowalność

W rozdziale tym omówione zostaną wyniki dotyczące dokładnej sterowalności dla układu Lamé. W pracy [14] pokazano ten rezultat w przypadku izotropowym. Można uzyskać go w przypadku anizotropowym, ale w obu przypadkach rezultat ten wymaga dodatkowych założeń typu geometrycznego.

Oznaczmy:

$$b_1(x) = \mu(x), \quad b_2(x) = \lambda(x) + 2\mu(x), \quad A_j = \partial_t^2 - b_j(x)\Delta,$$

$$p_j(x, \zeta) := \frac{1}{2}(\tau^2 - b_j(x)|\xi|^2), \quad \zeta = (\tau, \xi)$$

H_j oznacza pole hamiltonowskie generowane przez symbol p_j ,

$$\text{char } A_j = \{(z, \zeta) \in T^*R^4 : p_j(x, \zeta) = 0\}, \quad j = 1, 2.$$

$$z = (t, x), \quad P = \partial_t^2 - L, \quad \text{char } P = \text{char } A_1 \cup \text{char } A_2$$

$\exp(sH_j)(0, x, \zeta), s \in R$ nazywamy zerową bicharakterystyką A_j , gdy $p_j(x, \zeta) = 0$, jej naturalny rzut na R_x^3 nazywamy promieniem i oznaczamy przez $x^j(s)$.

Warunek A. Niech $\Gamma = \delta G$. Dla $T > 0$ i Γ zachodzi Warunek A, gdy dla dowolnego $x \in G, \xi \in R^3, b(x)|\xi|^2 = 1$ promień $x^j(s, x, \xi)$ nie należy do domknięcia G dla $s \in T$.

Założenie C. Dla dowolnej zerowej bicharakterystyki

$(s, x^j(s), 1, \xi^j(s)), s \in (0, t)$, takiej, że $x^j(0) \in G, x^j(t) \in \delta G$ zakładamy $\langle \xi^j(t), \nu(x(t)) \rangle \neq 0$, dla $j=1,2$.

Oznaczmy złamana bicharakterystykę A_j przez $\gamma^j(x, \xi)$ oraz jej promień przez $x^j(s, x, \xi)$, z prędkością promienia równą 1. Wtedy

Warunek B. Mówimy, że $T > 0, \Gamma \subset \delta G$ spełniają warunek B jeżeli dla dowolnych $x \in G, \xi \in R^3$ takich, że $b_j(x)|\xi|^2 = 1$ zachodzi $x^j(s, x, \xi) \in \Gamma$ dla pewnego $s \in (0, T)$.

Metodą oszacowania dokładnej obserwowalności i wykorzystując Hilbert Uniqueness Method dostajemy

Twierdzenie 5.1. Jeżeli $T > 0, \Gamma, \lambda, \mu$ spełniają jeden z warunków, Warunek A lub Warunek B, to dla każdego $S \in (T, +\infty), (\partial_t u(0), u(0)) \in X$, istnieje $f \in L^2([0, S] \times \Gamma)$ takie, że rozwiązanie (1.1), (1.2), (1.3) spełnia $u(S) = 0, \partial_t u(S) = 0$.

Bibliografia

- [1] Alabau F., Komornik V. (1998); *Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems*, „SIAM J. Control Optim.”, **37**(2) (521-542)

- [2] Ang D. D., Ikehata M., Trong D. D., Yamamoto M. (1998); *Unique continuation for a stationary isotropic Lamé system with variable coefficients*, „Comm. Part. Diff. Equat.”, **23** (371-385)
- [3] Belishev M. (1997); *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC- method)*, „Inverse Probl.”, **13**(5), (1-45)
- [4] Belishev M., Glasman A. (2000); *Boundary control and inverse problem for the dynamical Maxwell system: the recovering of velocity in regular zone*, „Algebra i Analiz”, **12**(2), (131-187); Trans. in „St. Petersburg Math.”
- [5] Burq N. (1997); *Cotrole de l'équation des ondes dans des ouverts pen reguliers*, „Asymptotic Analysis”, **14**, (157-191)
- [6] Chang J., Isakov V., Yamamoto M., Zhou Q. (1999); *Lipschitz stability in the lateral Cauchy problem for elasticity system*, Preprint University of Tokyo
- [7] Duvaut G., Lions J. L. (1972); *Les inequations en mecanique et en physique*, Dunod
- [8] Eller M., Isakov V., Nakamura G., Tataru D. (1998); *Uniqueness and stability in the Cauchy problem for Maxwell and elasticity system*, Preprint
- [9] Horn M. A. (1998); *Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the system of linear elasticity*, „J. Math. Anal. Appl.”, **223**, (126-150)
- [10] Leis R. (1986); *Initial boundary value problems in Mathematical Physics*, Teubner
- [11] Łada A., Sidz L. (2003); *Stable observability and exact Dirichlet cotrol-lability for the elasticity system*, „Asymptotic Analysis”, **36**, (149-168)
- [12] Łada A., Sidz L. (2003); *Stable Dirichlet observability and controllability*, „Asymptotic Analysis”, **36**, no 2, (149-168)
- [13] Łada A., Sidz L. (2004); *Approximate boundary controllability for the system of linear elasticity*, „Math. Methods in Applied Sciences”, **27**, no 17, (2017-2027)
- [14] Weck N. (2001); *Unique continuation for systems with Lamé principal part*, „Math. Meth. appl. Sci.”, **24**, (595-605)