ROCZNIK NAUKOWY WYDZIAŁU ZARZĄDZANIA W CIECHANOWIE 1-2 (II) 2008

Marek Aleksander Kowalski

OBLICZANIE I REPREZENTACJA CZOŁOWYCH FUNKCJI KULISTYCH

[**Słowa kluczowe:** równania różniczkowe, funkcje specjalne, sygnały analogowe, sygnały cyfrowe, ortogonalizacja Grama-Schmidta, stabilność numeryczna]

Streszczenie

Praca dotyczy wyliczania czołowych funkcji kulistych. Za podstawę obliczeń przyjmujemy rozwinięcia względem wielomianów Legendre'a. Stosując zmodyfikowaną ortogonalizację Grama-Schmidta wraz z algorytmem z monografii Thompsona [27] otrzymujemy stabilną metodę reprezentacji i wyliczania tych funkcji.

Preliminaria

Dla danej liczby $a > 0$ rozważmy klasę $W(a)$ funkcji całkowitych $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spełniających warunki

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad \text{i} \quad |f(z)| \leqslant K e^{a|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

gdzie K jest dodatnią stała niezależną od z, która może zależeć od f.

Klasa $W(a)$ ze standardowymi działaniami dodawania funkcji i mnożenia ich przez liczbę z ciała $\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową. Ponadto wzór

$$< f, g >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx, \quad f, g \in W(a)$$

definiuje iloczyn skalarny w $W(a)$. Zgodnie z tezą twierdzenia Paleya-Wienera $W(a)$ z iloczynem skalarnym $< \cdot, \cdot >$ jest przestrzenią Hilberta wszystkich funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ postaci

$$f(z) = \int\limits_{-a}^{a} F(t) e^{itz} dt,$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ i $F \in L_2(-a, a)$. Elementy klasy $W(a)$ nazywamy sygnałami analogowymi o paśmie a.

Dla każdej liczby $\dot{c} > 0$, wartości parametru κ, dla których równanie różniczkowe

$$(1 - t^2)u''(t) - 2tu'(t) + (\kappa - c^2t^2)u(t) = 0, \quad |t| < 1,$$

ma niezerowe rozwiązanie, mogą zostać uporządkowane w ściśle rosnący ciąg

$$0 < \kappa_0(c) < \kappa_1(c) < \kappa_2(c) < \dots.$$

Co więcej, dla $\kappa = \kappa_k(c)$ istnieje funkcja $u_k(c, t)$,

$$u_k(c, \cdot) : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

spełniająca to równanie różniczkowe oraz warunek $u_k(c, 0) = P_k(0)$, gdzie P_k jest wielomianem Legendra stopnia k.

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)^k, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Dla danej liczby dodatniej τ przyjmujemy

$$c = a\tau$$

i określamy czołową funkcje kulistą $\Psi_k : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\Psi_k(t) = \left(\int_{-1}^{1} u_k(c, s)^2 ds \right)^{-1/2} u_k(c, t/\tau).$$

Teoria tych funkcji została opracowana głównie przez H.J. Landaua, H.O. Pollaka i D. Slepiana, zob. [15], [16], [24], [26].

Czołowe funkcje kuliste są szczególnym przypadkiem funkcji $S_{m,n}(\eta)$ spełniających równanie różniczkowe

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1 - \eta^2)\frac{dS_{m,n}(c, \eta)}{dx}\right] + \left[\lambda_{m,n} - c^2\eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2}\right] S_{m,n}(c, \eta) = 0,$$

rozważanych w monografii [27] na stronie 309 dla $m, n = 0, 1, \dots$. Łatwo można zauważyć, że $\Psi_k(t)$ jest odpowiednio przeskalowaną funkcją $S_{0,k}(c, t)$.

Za książką [11] podajemy niżej najistotniejsze własności funkcji kulistych i przestrzeni $W(a)$.

- Funkcje Ψ_k spełniają równanie całkowe

$$\int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin(a(t-s))}{\pi(t-s)} \Psi_k(s) ds = \lambda_k \Psi_k(t),$$

gdzie $\lambda_k = \lambda_k(c)$ i $\lambda_k \searrow 0$ dla $k \to \infty$.

- Dla dowolnych liczb $h \in (0, \pi/a]$ i $z \in C$ i dla dowolnej funkcji $f \in W(a)$ and zachodzi

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(z-kh)\right)}{\frac{\pi}{h}(z-kh)}.$$

- Układ $\{\Psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ jest ortonormalny i zupełny w przestrzeni $L_2(-\tau, \tau)$.

- Każda funkcja Ψ_k ma dokładnie k miejsc zerowych

$$\xi_{k,1}, \xi_{k,2}, \dots, \xi_{k,k}$$

w przedziale $(-\tau, \tau)$. Co więcej, miejsca zerowe

$$\xi_{k,1}, \xi_{k,2}, \dots, \xi_{k,k} \quad \text{i} \quad \xi_{k+q,1}, \xi_{k+1,2}, \dots, \xi_{k+1,k+1}$$

przeplatają się, czyli dla $j = 0, 1, \dots, k$ są spełnione nierówności

$$\xi_{k+1,j} < \xi_{k,j} < \xi_{k+1,j+1}.$$

- Dla $\Phi_k = \lambda_k(c)^{1/2} \Psi_k$ układ $\{\Phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ jest ortonormalny w $L_2(-\infty, \infty)$ i zupełny w przestrzeni $W(a)$

$$\int_{-\tau}^{\tau} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(s) \Phi_k(s) ds = \delta_{j,k}.$$

- $W(a)$ jest przestrzenią Hiberta z jądrem odtwarzającym

$$f(z) =< f, K(\cdot, z) >, \quad \forall f \in W(a), z \in C,$$

$$K(t,z) = \frac{\sin(a(t-z))}{\pi(t-z)}.$$

- Niech E będzie liczbą dodatnią. Określamy $W(a;\tau)$ jako podprzestrzeń $L_2(-\tau,\tau)$ składającą się z funkcji z $W(a)$ ograniczonych do osi rzeczywistej i zdefiniujemy

$$J(a,\tau,E) = \{f \in W(a,\tau) : \|f\|^2_{2,\infty} \leqslant E\},$$

gdzie $\|f\|^2_{2,\infty} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

Wiadomo, że

$$\mathrm{span}\{\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-2}\}$$

jest podprzestrzenią ekstremalną dla n-tej średnicy Kołmogorowa,

$$d_n(J(a,\tau,E), W(a,\tau)), \quad n \geqslant 1.$$

Niech $(\cdot,\cdot)$ będzie iloczynem skalarnym w przestrzeni $L_2(-\tau,\tau)$ i niech

$$M_n f = [(f,\Psi_0), (f,\Psi_1), \ldots, (f,\Psi_{n-2})]$$

$$N_n f = [f(\xi_{n-1,1}), f(\xi_{n-1,2}), \ldots, f(\xi_{n-1,n-1})]$$

Wtedy jądra $\ker M$ i $\ker N$ są podprzestrzeniami ekstremalnymi dla n-tej średnicy Gelfanda

$$c_n(J(a,\tau,E), W(a,\tau)).$$

Ponadto

$$c_n(J(a,\tau,E), W(a,\tau)) = d_n(J(a,\tau,E), W(a,\tau))$$

$$= a_n(J(a,\tau,E), W(a,\tau)) = \sqrt{E\lambda_{n-1}(c)}.$$

Przyjmujemy, że występujące tu średnice są zdefiniowane wzorami[1]

$$\begin{aligned} d_n(A,F) &= \inf_{V\subset F, \dim V<n} \sup_{a\in A} \inf_{w\in V} \|a-w\|, \\ a_n(A,F) &= \inf_{P_n:F\to F, \dim P_n(F)<n} \sup_{a\in A} \|a-P_n(a)\|, \\ c_n(A,F) &= \inf_{L:F\to C^{n-1}} \sup\{\|a\| : a\in A\cap \ker L\}. \end{aligned}$$

[1]Wielkości d_n nazywamy średnicami Kołmogorowa, a wielkości a_n liniowymi średnicami Kołmogorowa.

- Dla $p = [2c/\pi] - 1$ i $q = [2c/\pi] + 1$ wartości własne $\lambda_p(c)$ i $\lambda_q(c)$ spełniają nierówności
$$\lambda_p(c) \geqslant 1/2, \quad \lambda_q(c) \leqslant 1/2.$$
Co więcej, jeśli $k > 2c/\pi$, to
$$\frac{\pi}{2I_k(k+1/2)}\left(\frac{c}{2\pi k}\right)^{2k} < \lambda_k(c) < \frac{2c}{\pi^2 k^2}\left(\frac{ec}{2k}\right)^{2k},$$
$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2k} dx.$$

Elementy klasy $J(a, \tau, E)$ są zwykle nazywane sygnałami analogowymi o paśmie a ì energii ograniczonej przez E, rozpatrywanymi na przedziale obserwacji $[-\tau, \tau]$.

Czołowe funkcje kuliste mają szerokie zastosowanie w przetwarzaniu sygnałów cyfrowych jak również w teorii komunikacji. Typowe zastosowania tych funkcji obejmują analizę:

- sygnałów o ograniczonym czasie i ograniczonym paśmie, [13], [14], [25],
- sygnałów o ograniczonym paśmie i ograniczonej energii, [8], [9], [10], [12],
- optymalnej informacji i optymalnego odtwarzania sygnałów, [11], [20], [21], [23],
- optymalnego przetwarzania analogowo-cyfrowego, [20], [21], [23],
- optymalnego przetwarzania cyfrowo-analogowego, a także analizę związanego z tym wpływu niedokładności pomiarowych, [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [19].

Ponadto funkcje te są wykorzystywane w teorii elektromagnetyzmu i innych teoriach współczesnej fizyki [17].

Reprezentacja i obliczenia

Numeryczne obliczanie czołowych funkcji kulistych jest dość skomplikowane, zob. [17], [27], [30]. Zdaniem autorów książki [17] trudności te biorą się z braku ortogonalności tych funkcji: „One of the difficulties is the non-existence of orthogonality among spheroidal wave functions”. Pogląd ten, rozumiany dosłownie, jest całkowicie błędny, gdyż

$$\int_{-\tau}^{\tau} \Psi_j(t)\Psi_k(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(s)\Phi_k(s)ds = \delta_{j,k}.$$

więc funkcje Φ_j są ortogonalne na całej prostej rzeczywiste i na zbiorach $[-\tau, \tau]$ oraz $\mathbb{R} \setminus [-\tau, \tau]$. Zacytowane zdanie można odnieść jedynie do numerycznych reprezentacji tych funkcji. Obliczenia czołowych funkcji kulistych w pakiecie *Mathematica* bazują na metodzie Raylegha–Ritza, zob. [30].

W monografi funkcji specjalnych [27] znajdujemy algorytm (wraz z kodem źródłowym w języku C) na obliczenie współczynników $d(n, j)$ rozwinięć

$$\Psi_n = \sum_{j=0}^{\infty} d(n, j)p_j,$$

gdzie p_j są ortonormalnymi wielomianami Legendre’a na przedziale $[-\tau, \tau]$,

$$\int_{-\tau}^{\tau} p_j(x)p_k(x)dx = \delta_{j,k}.$$

Reprezentacja funkcji Ψ_n szeregami względem wielomianów Legendre’a jest bardzo użyteczna i – jak wskażemy dalej – pozwala kontrolować jakość obliczeń.

Wspomniany wyżej algorytm jest dość szybki, ale mało użyteczny z powodu niestabilności numerycznej. Obliczone w arytmetyce zmiennopozycyjnej normy euklidesowe $E_n \overset{df}{=} \|I - G_n\|_E$ są nieakceptowalnie duże. Pod znakiem normy występują tu macierz jednostkowa I oraz macierz Grama G_n,

$$G_n = [(\Psi_j, \Psi_k)]_{j,k=0}^{n}.$$

Korzystając z ortonormalności wielomianów p_j łatwo zauważamy, że

$$G_n = \left[\sum_{i=0}^{\infty} d(j, i)d(k, i)\right]_{j,k=0}^{n}.$$

Szeregi nieskończone w ostatnim wzorze są zbieżne bardzo szybko i można przyjąć, że

$$G_n = \left[\sum_{i=0}^{n+t/3} d(j, i)d(k, i)\right]_{j,k=0}^{n},$$

gdzie t jest liczbą bitów przeznaczonych na reprezentacje mantysy w arytmetyce zmiennopozycyjnej.

Sposobem na poprawienie tego algorytmu i uczynienia zeń stabilnego narzędzia reprezentacji funkcji Φ_k dla $k = 1, \ldots, nMax$ jest połączenie go z powtarzaną wielokrotnie ortogonalizacją Grama–Schmidta na współczynnikach $d(n, j)$ obciętych rozwinięć

$$\Phi_n = \sum_{j=0}^{n+t/3} d(n, j) p_j$$

oraz wyeliminowanie zeń obliczeń funkcji gamma bazujących na szeregach rozbieżnych, gdyż – jak sam autor [27] podkreśla, zob. str. 81 i 82 – możne je stosować w ograniczonym zakresie dokładności względnej. Dla obliczeń funkcji Ψ_k wystarczają de facto obliczenia silni, czyli szczególnych wartości funkcji gamma, więc doświadczony programista nie będzie mieć problemu z opracowaniem stosownej modyfikacji. Bardziej szczegółowego wyjaśnienia wymaga modyfikacja dotycząca ortogonalizacji Grama–Schmidta. Podajemy dalej odpowiedni fragment pseudokodu C bazującego na (zmodyfikowanym) algorytmie Grama-Schmidta, zob. [11]

```
times = nMax/3;
rMax = nMax + t/3;
⋮
for(m = 1; m < times; m++)
for(n = 0; n < nMax; n++)
{
    norm = 0.0;
    for(r = 0; r <= rMax; r++)
    norm+ = d(n,r) * d(n,r);
    norm = sqrt(norm);
    for(i = n + 1; i <= nMax; i++)
    {
        norm = 0.0;
        for(r = 0; r <= rMax; r++)
        norm+ = d(n,r) * d(i,r);
        for(r = 0; r <= rMax; r++)
        d(i,r)- = norm * d(n,r);
    }
}.
```

Konieczność wielokrotnego stosowania ortogonalizacji Grama-Schmidta jest konsekwencją tego, że długość obciętych rozwinięć rośnie wraz z n. Przy rzeczywistym kodowaniu należy dodatkowo uwzględnić, że przy ustalonym n co drugi ze współczynników $d(n,j)$ jest zerem, gdyż funkcje Φ_n, podobnie jak wielomiany p_n, są odpowiednio parzyste dla parzystego n i nieparzyste dla nieparzystego n.

Po wprowadzeniu opisanych tu modyfikacji uzyskujemy

$$E_n \leqslant K(n)2^{-t},$$

gdzie $K(n)$ jest stałą zależną jedynie od n.

W zamieszczonej niżej tabeli podajemy dla $t = 54$, $c = \pi/4$, $\pi/2$, 2 i $n = 19, \ldots, 99$ zaokrąglone do dwóch cyfr znaczących wyniki E_n oraz $e_n \stackrel{df}{=} 10^{16}E_n \approx 0,555\,11\ 2^tE_n$ będące rezultatem działania algorytmu bez stosowania ortogonalizacji (kolumna *bo*) i z jej zastosowaniem (kolumna *zo*), odpowiednio.

Tabela 1: Wartości E_n i e_n

	$c = \pi/4$		$c = \pi/2$		$c = 2$	
	bo	*zo*	*bo*	*zo*	*bo*	*zo*
n	E_n	e_n	E_n	e_n	E_n	e_n
19	3,5	5,9	2,1	7,0	2,0	6,3
29	11	7,7	9,2	8,0	9,2	7,7
39	18	8,0	16	8,9	16	8,3
49	25	9,4	23	9,7	23	9,9
59	32	11	30	10	30	10
69	39	12	38	11	37	11
79	46	12	45	12	45	12
89	53	13	52	12	52	12
99	60	14	59	13	59	13

Dalsze wyniki testów i program komputerowy uwzględniający opisaną tu modyfikację podanego w [27] algorytmu obliczania i reprezentacji czołowych funkcji kulistych można znaleźć w pracy [23]. W tejże pracy czytelnik znajdzie też program symulujący optymalne przetworniki cyfrowo-analogowe, bazujące na miejscach zerowych funkcji Ψ_k. Optymalność jest tu rozumiana w modelu najgorszego przypadku opisanym w szerokim kontekście w [18] [22] [28] i [29].

Bibliografia

[1] Dąbrowska D., (2001); *Skutki zaburzeń miejsc i wartości odczytu próbek w optymalnym odtwarzaniu*, Wydawnictwo UKSW, ISBN 83-7072-198-2, 424–490.

[2] Dąbrowska D., (2003); *Linear algorithms for recovering linear functionals from jittered information*, „J. Complexity" **19**, 555–563.

[3] Dąbrowska D., (2004); *Jitter and measurement errors in approximation and integration of Lipschitz functions*, „Numerical Algorithms", **35**, 45–60.

[4] Dąbrowska D., Kowalski M. A., (1998); *Approximating band- and energy-limited signals in the presence of jitter*, „J. Complexity" **14**, 557–570.

[5] Kacewicz B. Z., Kowalski M. A., (1995); *Approximating linear functionals on unitary spaces in the presence of bounded data errors with applications to signal recovery*, „J. Adaptive Control and Signal Processing" **9**, 19–31.

[6] Kacewicz B. Z., Kowalski M. A., (1995); *Recovering linear operators from inaccurate data*, „J. Complexity" **11**, 227–239.

[7] Kacewicz B. Z., Kowalski M. A., (1992); *Recovering signals from inaccurate data*, w Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics II, M. J. Silbermann, H. D. Tagare, Editors, Proc. SPIE **1610**, 68–74.

[8] Kowalski M. A., (1986); *Optimal complexity recovery of band- and energy –limited signals*, „J. Complexity" **2**, 239–254.

[9] Kowalski M. A., (1989); *On approximation of band-limited signals*, „J. Complexity" **5**, 283–302.

[10] M. A. Kowalski M. A., (2001); *Odtwarzanie wielowymiarowych sygnał ów analogowych o ograniczonym paśmie i ograniczonej energii*, Wydawnictwo UKSW, ISBN 83-7072-198-2, 416–423.

[11] M.A. Kowalski M. A., K.A. Sikorski K. A., Stenger F., (1995); *Selected topics in approximation and computation*, Oxford Academic Press.

[12] Kowalski M. A., Stenger F., (1989); *Optimal complexity recovery of band- and energy-limited signals II*, „J. Complexity" **5**, 45–59.

[13] Landau H. J., (1965); *Sampling, data transmission, and the Nyquist rate*, „Trans. Amer. Math. Soc." **115**, 242–256.

[14] H.J. Landau H. J., (1985); *An overwiev of time and frequency limiting*, w Fourier Techniques and Applications (J.F. Price, Ed.) Plenum.

[15] Landau H. J., Pollak, H. O., (1961); *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty, II*, „Bell System Tech. J." **40**, (1961) 65–84.

[16] Landau H. J., Pollak H. O., (1962); *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty, III*, „Bell System Tech. J." **41**, 1295–1336.

[17] Le-Wei L., Xiao-Kang K., Mook-Seng L., (2002); *Spheroidal Wave Functions in Electromagnetic Theory*, Wiley.

[18] Micchelli C. A., Rivlin T. J., (1977); *A survey of optimal recovery*, w *Optimal Estimation in Approximation Theory*, C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, eds., Plenum Press.

[19] Melkman A. A., Micchelli C. A., (1979); *Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data*, „SIAM J. Num. Anal." **16**, 87–105.

[20] Melkman A. A., (1977); *n-Widths and optimal interpolation of time and band-limited functions*, w C. A.Micchelli and T. J. Rivlin (red.), Optimal Estimation in Approximation Theory, Plenum.

[21] Melkman A. A., (1985); *n-Widths and optimal interpolation of time and band-limited functions*, „SIAM J. Math. Anal." **16**, 803–813.

[22] Plaskota L., (1996); *Noisy Information and Computational Complexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[23] Sergiel T., (2007); *Optymalne przetworniki cyfrowo-analogowe* (praca magisterska napisana pod kierownictwem M. A. Kowalskiego), Uniwersytet Śląski, Wydział Informatyki i Nauki o Materiałach.

[24] Slepian D., (1965); *Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions*, „J. Math. Phys." **44**, 99–143.

[25] Slepian D., (1976); *On bandwidth*, „Proc. IEEE" **64**, 292–300.

[26] D. Slepian D., Pollak H. O., (1961); *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty, I*, „Bell System Tech. J." **40**, 43–64.

[27] Thompson W. J., (1997); *Atlas for Computing Mathematical Functions*, Wiley-Interscience.

[28] Traub J. F., Woźniakowski H., (1980); *A General Theory of Optimal Algorithms*, Academic Press.

[29] Traub J. F., Wasilkowski G. W., Woźniakowski H., (1988); *Information Based Complexity*, Academic Press.

[30] Volkmer H., (2004); *Error estimates for the Rayleigh-Ritz approximations of eigenvalues and eigenfunctions of the Mathieu and spheroidal wave equation*, „Constr. Approx." **20**, 39–54.