INFORMATYKA I MATEMATYKA

Anna Rusinek

NIERÓWNOŚĆ MAKSYMALNA DLA SUM NIEZALEŻNYCH ZMIENNYCH LOSOWYCH

[**Słowa kluczowe:** Martyngały, nierówności maksymalne, procesy o przyrostach niezależnych]

Streszczenie.
W pracy pokazane jest, że w klasie martyngałów o przyrostach niezależnych stałą 4 w nierówności Dooba można nieznacznie poprawić.

***

Rozważamy zmienne losowe o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Hilberta $(H, \|\cdot\|)$ na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Niech $d_i, i = 1, 2, ..., n$ będą przyrostami martyngałowymi, tzn. niech proces

$$M_k = \sum_{i=1}^{k} d_i,$$

będzie martyngałem. Funkcję kwadratową martyngału $S_n(M)$ oraz funkcję maksymalną M_n^* definiujemy następująco

$$S_n(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \|d_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$M_n^* = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|M_k\|.$$

Nierówności pomiędzy momentami funkcji kwadratowej, funkcji maksymalnej i samego martyngału mają fundamentalne znaczenie dla teorii martyngałów i analizy harmonicznej. Następująca nierówność

$$\mathbb{E}\, S_n(M) \leqslant D\, \mathbb{E}\, M_n^*, \tag{1}$$

została dowiedziona przez Davisa [2]. Garsia [4] udowodnił, że nierówność (1) zachodzi ze stałą $D = 2 + \sqrt{5}$. Praca Burholdera, w której dowodzi on optymalności stałej $D = \sqrt{3}$, prezentuje nowe metody, które rozwinął Osękowski [5], aby udowodnić nowe nierówności pomiędzy pierwszymi momentami funkcji kwadratowej, funkcji maksymalnej i samego martyngału.

Nierówność

$$\mathbb{E}\, M_n^* \leqslant d\, \mathbb{E}\, S_n(M), \tag{2}$$

udowodnił Davis [2]. Następnie Garsia [4] pokazał, że nierówność (2) zachodzi ze stałą $d = \sqrt{10}$. Nie jest znana stała optymalna w nierówności (2).

Równość drugich momentów funkcji kwadratowej i samego martyngału

$$\mathbb{E}\, \|M_n\|^2 = \mathbb{E}\, (S_n(M))^2 ,$$

jest w teorii martyngałów faktem elementarnym, ale kluczowym dla teorii całki stochastycznej.

Jedną z najważniejszych nierówności maksymalnych dla drugich momentów jest następująca nierówność Dooba [3],

$$\mathbb{E}\, (M_n^*)^2 \leqslant C\, \mathbb{E}\, (S_n(M))^2 . \tag{3}$$

Nierówność ta pozwala, między innymi, zdefiniować całkę stochastyczną dla szerszej klasy procesów. Wielkość stałej C nie ma znaczenia dla znanych zastosowań nierówności Dooba. Stała $C = 4$ jest optymalna w klasie wszystkich martyngałów, ale nie jest optymalna w klasie martyngałów o przyrostach niezależnych. Głównym wynikiem pracy jest Twierdzenie 1, w którym dowodzimy, że dla martyngałów o przyrostach niezależnych nierówność (3) zachodzi ze stałą $C = 1 + 2\sqrt{2}$, nie wiadomo jednak, czy jest to stała optymalna.

Twierdzenie 1. *Niech $\xi_i, i = 1, 2, ..., n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Hilberta $(H, \|\cdot\|)$. Załóżmy, że $\mathbb{E}\, \xi_i = 0$ dla każdego i. Wówczas*

$$\mathbb{E}\, (Z_n^*)^2 \leqslant \left(1 + 2\sqrt{2}\right) \mathbb{E}\, (S_n(Z))^2 ,$$

gdzie $Z_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i$.

D o w ó d:

Mamy

$$\begin{aligned}\|Z_k\|^2 &= \sum_{i=1}^{k} \|\xi_i\|^2 + \ 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i-1} \langle \xi_j, \xi_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \|\xi_i\|^2 + \ 2\sum_{i=1}^{k} \langle Z_{i-1}, \xi_i \rangle .\end{aligned}$$

Zatem

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|Z_k\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2 + 2X_n^*,$$

gdzie

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} \langle Z_{i-1}, \xi_i \rangle .$$

Proces $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez zmienne losowe ξ_i, $\mathcal{F}_i = \sigma\left\{\xi_j : 1 \leqslant j \leqslant i\right\}$, gdyż

$$\mathbb{E}\left(\langle Z_{i-1}, \xi_i\rangle \,|\mathcal{F}_{i-1}\right) = \langle Z_{i-1}, \mathbb{E}\,\xi_i\rangle = 0.$$

Zatem z nierówności Dooba

$$\mathbb{E}\,(X_n^*)^2 \leqslant 4\,\mathbb{E}\,(S_n(X))^2 .$$

Natomiast

$$\begin{aligned}2\,\mathbb{E}\,(S_n(X))^2 &= 2\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|\langle Z_{i-1}, \xi_i\rangle|^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,\|Z_{i-1}\|^2\,\mathbb{E}\,\|\xi_i\|^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E}\,\|\xi_j\|^2\,\mathbb{E}\,\|\xi_i\|^2 \\ &\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E}\,\|\xi_j\|^2\,\mathbb{E}\,\|\xi_i\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}\,\|\xi_i\|^2\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,\|\xi_i\|^2\right)^2 .\end{aligned}$$

Tak więc

$$(\mathbb{E}\,X_n^*)^2 \leqslant \mathbb{E}\,(X_n^*)^2 \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,\|\xi_i\|^2\right)^2 ,$$

skąd

$$\mathbb{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|Z_k\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\,\|\xi_i\|^2 + \; 2\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\,\|\xi_i\|^2\,.$$

Bibliografia

[1] Burkholder D., (2002); *The best constant in the Davis inequality for the expectation of the martingale square function*, „Trans. Amer. Math. Soc." **354**, 91-105.

[2] Davis B., (1970); *On the integrability of the martingale square function*, „Israel J. Math." **8**, 187-190.

[3] Doob J. L., (1953); *Stochastic processes*, Wiley New York.

[4] Garsia A. M., (1973); *The Burgess Davis inequalities via Fefferman's inequality*, „Ark. Mat." **11**, 229-237.

[5] Osękowski A., (2005); *Two inequalities for the first moments of a martingale, its square function and its maximal function*, „Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics" **53**, 441-449.