Jan Rusinek

TESTY EGZAMINACYJNE Z MATEMATYKI

[**Słowa kluczowe.** testy egzaminacyjne, informatyzacja procesu dydaktycznego]

Streszczenie.

W pracy omawiane są typy testowych pytań egzaminacyjnych charakterystyczne dla przedmiotów „ścisłych" i sposoby ich oceniania uwzgledniające informatyczne wspomaganie procesu egzaminacyjnego.

1. Wstęp

Specyfika przedmiotów „ilościowych" takich jak matematyka, statystyka, informatyka itp. polega między innymi na tym, że egzamin nie powinien składać się z pytań sprawdzających wiedzę „encyklopedyczną", ale raczej kłaść nacisk na sprawdzanie umiejętności zastosowania potrzebnych twierdzeń czy wzorów. Wielu wykładowców dopuszcza w związku z tym na egzaminie korzystanie z różnego rodzaju "pomocy naukowych" jak notatki, kalkulatory, tablice matematyczne itp.

Z drugiej strony w celu obiektywizacji oceny oraz przyspieszenia rezultatów egzaminu przy wykorzystaniu elektronicznych metod sprawdzania (komputery, skanery) coraz powszechniej wprowadza się egzaminy testowe.

Popularność pytań testowych bardzo wzrosła w ostatnich latach dzięki internetowi. Można tysiące różnorodnych testów znaleźć w sieci. Są tam zarówno testy skierowane do uczniów na konkretnym poziomie, ale i wiele testów dla „amatorów" chcących sprawdzić swoje umiejętności czy wiedzę. Dzięki formie testowej użytkownik może natychmiast otrzymać swój rezultat.

Testy mające na celu obiektywne sprawdzenie wiedzy studentów wyniesionej z zajęć muszą być starannie przemyślane i przygotowane i uwzględniać specyfikę danego przedmiotu.

Ogólne uwagi o stosowaniu testów w dydaktyce można znaleźć w [6].

Można się spotkać ze zdaniem, że takie przedmioty jak matematyka nie nadają się do egzaminów testowych. Nie jest to prawda pod następującym warunkiem: pytanie testowe powinno być tak skonstruowane, że aby na nie poprawnie odpowiedzić trzeba rozwiązać zadanie w taki sam sposób, w jaki by się to robiło gdyby nie było to pytanie testowe, ale zwykłe zadanie rachunkowe lub pytanie na egzaminie ustnym.

Autor od wielu lat przeprowadza egzaminy testowe z wielu przedmiotów matematycznych i informatycznych na różnych kierunkach studiów i w artykule tym zaprezentowane są pewne wnioski i sugestie dotyczące tworzenia testów spełniających powyższy postulat.

W ostatnich latach przeprowadzane testy oparte są na programach napisanych przez autora do tworzenia testów ([4]) i sprawdzania ([5]).

Program prezentowany w [4] został w międzyczasie ulepszony o obsługę testu, w którym przygotowano różną liczbę odpowiedzi do poszczególnych pytań. Program losuje spośród nich wybraną liczbę odpowiedzi niezależnie od tego ile odpowiedzi jest przygotowanych w danym pytaniu. Przykładowe zadania będą uwzględniały tę możliwość.

Spośród pytań testowych spełniających omawiany postulat warto wyróżnić charakterystyczne typy. Omówimy je w kolejnych rozdziałach.

2. Pytania jednokrotnego wyboru

Pytania jednokrotnego wyboru mogą być dwojakiego rodzaju. W pytaniu 1-go rodzaju w celu prawidłowego rozwiązania należy wykonać odpowiednie rozumowanie lub obliczenie i sprawdzić, która odpowiedź pokrywa się z otrzymanym wynikiem. Po rozwiązaniu zadania wybór prawidłowej odpowiedzi jest natychmiastowy, bo odpowiedzi się wzajemnie wykluczają.

Oto pytanie tego typu sprawdzające umiejętność całkowania przez części.

PYTANIE 1. Całka $\int\limits_0^1 xe^x\,dx$ jest równa.

$\boxed{\text{A}}$ 1; (TAK)

$\boxed{\text{B}}$ 2; (NIE)

$\boxed{\text{C}}$ e; (NIE)

$\boxed{\text{D}}$ $\ln 2$; (NIE)

Jasne jest, że aby mieć pewność udzielenia prawidłowej odpowiedzi zrobić dokładnie to samo co trzeba by zrobić przy zadaniu: *Oblicz całkę:* $\int\limits_0^1 xe^x\,dx$.

Pytania tego typu można też wykorzystać do testu wielokrotnego wyboru. Wtedy albo wszystkie odpowiedzi są fałszywe (np. jeśli zostaną wylosowane odpowiedzi B, C, D), albo prawdziwa jest dokładnie jedna.

W pytaniach drugiego rodzaju odpowiedzi się wzajemnie nie wykluczają i nie ma pomiędzy nimi widocznego związku; trzeba zanalizować każdą z nich z osobna. Jeśli student ma szczęście i trafi za pierwszym razem na odpowiedź prawidłową, to następnych nie musi sprawdzać. Oto przykład takiego pytania

PYTANIE 2. Niech $f(x) = x^3 + x^2 + x$. Wtedy

$\boxed{\text{A}}$ $f'(1) = 3$; (NIE)

$\boxed{\text{B}}$ $f''(1) = 8$; (TAK)

$\boxed{\text{C}}$ $f'''(1) = 12$; (NIE)

Zdaniem autora takich pytań należy unikać, bowiem czas zużyty na rozwiązanie zależy od kolejności odpowiedzi, a więc i od szczęścia.

Inaczej jest w przypadku pytania prezentowanego poniżej. Można rozwiązywać to pytanie wykluczając odpowiedzi fałszywe, wtedy informacja, że dokładnie jedna odpowiedź jest prawdziwa, może być kluczem do szybkiego rozwiązania. Oto takie pytanie:

PYTANIE 3. Niech a, b, c, d będą liczbami dodatnimi. Wtedy

$\boxed{\text{A}}$ $(ac^2 + bd^2)^3 \leqslant (a^3 + b^3)(c^3 + d^3)^2$; (TAK)

$\boxed{\text{B}}$ $(ac^4 + b^4d)^2 \leqslant (a^5 + b^5)(c^4 + d^4)$; (NIE)

$\boxed{\text{C}}$ $(ac^2 + b^2d)^3 \leqslant (a^6 + b^6)(c^2 + d^2)^2$. (NIE)

Aby udowodnić nierówność A, trzeba by przeprowadzać pewne rachunki. Natomiast spostrzeżenie, że w nierównościach B i C mamy po obu stronach inne potęgi prowadzą do wniosku, że nierówności te nie mogą być prawdziwe dla wszystkich a, b, c, d. Zatem prawdziwa może być tylko odpowiedź A.

3. Pytania wielokrotnego wyboru typ I

Do typu pierwszego będziemy zaliczać takie zadania, które trzeba rozwiązać w całości, a potem dopasować odpowiedzi. Samo dopasowanie jest przy poprawnym rozwiązaniu praktycznie automatyczne, ani liczba ani kolejność odpowiedzi nie wpływa zasadniczo na czas rozwiązania.

Oto zadanie z tej grupy sprawdzające umiejętność badania funkcji.

PYTANIE 4. Niech $f(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$. Wtedy

$\boxed{\text{A}}$ Funkcja f w punkcie $x = -3$ osiąga maksimum lokalne (TAK);

$\boxed{\text{B}}$ Funkcja f w punkcie $x = 1$ osiąga maksimum lokalne (NIE);

$\boxed{\text{C}}$ Funkcja f w punkcie $x = -1$ osiąga minimum lokalne (NIE);

$\boxed{\text{D}}$ Funkcja f w punkcie $x = 1$ osiąga minimum lokalne (TAK);

$\boxed{\text{E}}$ W przedziale $(-\infty; -1)$ funkcja f jest wklęsła (TAK);

$\boxed{\text{F}}$ W przedziale $(0; 1)$ funkcja f jest wklęsła (NIE);

$\boxed{\text{G}}$ W przedziale $(-1; 1)$ funkcja f jest malejąca (TAK);

$\boxed{\text{H}}$ W przedziale $(1;2)$ funkcja f jest malejąca (NIE);

$\boxed{\text{I}}$ Prosta o równaniu $y = x$ jest asymptotą wykresu funkcji f (TAK);

$\boxed{\text{J}}$ Prosta o równaniu $y = x - 1$ jest asymptotą wykresu funkcji f (NIE);

Jeśli wylosujemy kilka odpowiedzi, to jasne jest, że najszybszą metodą rozwiązania tego zadania jest przeprowadzenie badania funkcji f, sporządzenie odpowiedniej tabelki, a następnie dopasowanie do niej wylosowanych odpowiedzi.

Inny przykład jest trochę bardziej teoretyczny:

PYTANIE 5. Aby wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x, y) = 3x^4 - 2xy^3 + y^4$ w zbiorze $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ należy rozwiązać układ równań:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{cases} 12x^3 - 2y^3 - 2\lambda x = 0 \\ 6xy^2 + 4y^3 - 2\lambda y = 0 \quad \text{(TAK)} \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{cases} 12x^3 - 2y^3 = 0 \\ 6xy^2 + 4y^3 - 2 = 0 \quad \text{(NIE)} \\ 2x + 2y + \lambda = 0; \end{cases}$

$\boxed{\text{C}}$ $\begin{cases} 12x^3 - 2y^3 - 2\lambda y = 0 \\ 6xy^2 + 4y^3 - 2\lambda x = 0 \quad \text{(NIE)} \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{cases} 6x^3 - y^3 - \lambda x = 0 \\ 3xy^2 + 2y^3 - \lambda y = 0 \quad \text{(TAK)} \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

Jest to pytanie na znajomość metody mnożników Lagrange'a (patrz np. [1]). Należy wypisać funkcję Lagrange'a, zróżniczkować ją względem x, y i λ i zobaczyć, która odpowiedź „pasuje". Trzeba jeszcze tylko zauważyć, że pierwsza i czwarta odpowiedź są de facto identyczne.

Pytanie może nosić jeszcze bardziej teoretyczny charakter, testować znajomość i **rozumienie** pojęć. Oto przykład sprawdzający rozumienie jednostajnej ciągłości funkcji jednej zmiennej [3 str. 76].

PYTANIE 6. O funkcji rzeczywistej f wiemy, że jest jednostajnie ciągła na przedziale $(-\infty; \infty)$, dodatnia i różnowartościowa. Wtedy

$\boxed{\text{A}}$ Funkcja $g(x) = 3f(x)$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $(-\infty; \infty)$ (TAK);

$\boxed{\text{B}}$ Funkcja $g(x) = [f(x)]^2$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $(-\infty; \infty)$ (NIE);

$\boxed{\text{C}}$ Funkcja $g(x) = f(f(x))$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $(-\infty; \infty)$ (TAK);

$\boxed{\text{D}}$ Funkcja $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $(-\infty; \infty)$ (NIE);

$\boxed{\text{E}}$ Funkcja $g(x) = f^{-1}(x)$ jest jednostajnie ciągła (NIE).

Zdaniem autora powyższe pytanie testowe równie dobrze sprawdza rozumienie jednostajnej ciągłości jak np. zadanie: *Podaj definicję jednostajnej ciągłości funkcji, przykład funkcji jednostajnie ciągłej i przykład funkcji ciągłej, ale nie jednostajnie ciągłej.*

Jeszcze jeden charakterystyczny przykład z tej grupy. Należy w nim rozwiązać zadanie, czyli obliczyć wynik, a następnie porównać go z odpowiedziami mającymi postać nierówności.

PYTANIE 7. Niech $f(x) = \frac{3x+5}{2x+2}$.

$\boxed{\text{A}}$ $f'(0) > 0$ (NIE);

$\boxed{\text{B}}$ $f'(0) < 0$ (TAK);

$\boxed{\text{C}}$ $f'(0) > 1$ (NIE);

$\boxed{\text{D}}$ $f'(0) > -2$ (TAK);

$\boxed{\text{E}}$ $f'(0) < \frac{1}{2}$ (TAK);

Bardzo sensowne pytania tego typu mogą polegać na tym, że w odpowiedziach mamy zawarte kolejne etapy rozwiązania zadania. Oto przykład. Niech zadanie polega na obliczeniu całki

$$\int_0^1 x^2 f'''(x)\,dx,$$

gdzie f jest jakąś funkcją mającą ciągłą trzecią pochodną. Jest to następne zadanie sprawdzające umiejętność całkowania przez części. Najpierw prześledźmy rozwiązanie.

$$\int_0^1 x^2 f'''(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & v' = f''' \\ u' = 2x & v = f'' \end{bmatrix} = x^2 f''(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2xf''(x)\,dx =$$

$$f''(1) - \begin{bmatrix} u = 2x & v' = f'' \\ u' = 2 & v = f' \end{bmatrix} - \left(2xf'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2f'(x)\,dx\right) =$$

$$f''(1) - 2f'(1) + 2f(x)\Big|_0^1 = f''(1) - 2f'(1) + 2f(1) - 2f(0).$$

Wtedy całe pytanie z odpowiedziami może wyglądać np. następująco:

PYTANIE 8. Niech f bedzie funkcją mającą ciągłą pochodną trzeciego rzędu. Całka $\int_0^1 x^2 f'''(x)\,dx$ jest równa:

$\boxed{\text{A}}$ $f''(1) - \int_0^1 2xf''(x)\,dx$; (TAK);

$\boxed{\text{B}}$ $f''(1) + f'(1) - \int_0^1 2xf''(x)\,dx$; (NIE)

C $f''(1) - 2f'(1) + \int\limits_0^1 2f'(x)\,dx$; (TAK)

D $f'(1) - f'(0) + \int\limits_0^1 2f(x)\,dx$; (NIE)

E $f''(1) - 2f'(1) + 2f(1) - 2f(0)$; (TAK)

F $f''(1) - f''(0) - f'(1) + f'(0) + f(1) - f(0)$; (NIE)

4. Pytania wielokrotnego wyboru typ II

Pytanie tego typu dotyczy tego samego problemu, ale odpowiedzi są jakby niezależnymi zadaniami i liczba odpowiedzi wpływa w istotny sposób na czas rozwiązania tzn. każdą odpowiedź należy osobno sprawdzić.

Oto przykłady:

PYTANIE 9. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wykonalne są działania

A AB (TAK):

B $A^T B$ (NIE):

C $A^T B^T$ (TAK):

D BA (TAK):

E AB^T (NIE):

Student musi w każdej odpowiedzi sprawdzić, czy liczba kolumn w pierwszej macierzy jest taka sama jak liczba wierszy w drugiej. Prawidłowe zaznaczenie wszystkich odpowiedzi dowodzi, ze student wie, kiedy można macierze mnożyć.

A oto przykład takiego pytania sprawdzającego znajomość wzorów na różniczkowanie.

PYTANIE 10. O funkcjach f i g wiemy, że $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $g(0) = 2$, $g'(0) = 3$. Wtedy

A $(f + g)'(0) = 4$; (TAK)

B $(f - g)'(0) = 2$; (NIE);

C $(fg)'(0) = 2$; (TAK);

D $(fg)'(0) = 3$; (NIE);

E $\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{1}{2}$; (TAK)

$\boxed{\text{F}}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{2}{9}$; (NIE)

$\boxed{\text{G}}$ $(g \circ f)'(0) = 3$; (TAK);

$\boxed{\text{H}}$ $(g \circ f)'(0) = 0$; (NIE).

Mamy tu cztery niezależne zadania: pierwsze (odpowiedzi A i B) sprawdzają znajomość wzoru na pochodną sumy, drugie (odpowiedzi C i D) znajomość wzoru na pochodną iloczynu, trzecie (odpowiedzi E i F) sprawdza umiejętność różniczkowania ilorazu, czwarte (odpowiedzi G i H) sprawdza umiejętność różniczkowania funkcji złożonej.

Oto jeszcze jedno pytanie tego typu sprawdzające umiejętność całkowania przez części:

PYTANIE 11. Wartość poniższej całki jest równa 1:

$\boxed{\text{A}}$ $\int_0^1 xe^x\,dx$ (TAK);

$\boxed{\text{B}}$ $\int_{-1}^{\ln 2} xe^x\,dx$ (NIE);

$\boxed{\text{C}}$ $\int_1^e \ln x\,dx$ (TAK);

$\boxed{\text{D}}$ $\int_2^{e^2} \ln x\,dx$ (NIE);

5. Ocenianie testów jednokrotnego wyboru

W wypadku testu jednokrotnego wyboru student powinien otrzymywać jeden punkt za prawidłową odpowiedź na pytanie. Nasuwa się problem co w wypadku złej odpowiedzi albo braku odpowiedzi. Niektórzy uważają, że należy zniechęcać studentów do losowego wybierania odpowiedzi przyznając za złą odpowiedź punkty ujemne. Autor uważa też, że za złą odpowiedź należy przyznawać tzw. ujemne punkty, ale motywacja tego jest zupełnie inna. Nie chodzi o to, aby **karać** studenta za złą odpowiedź, ale aby **nagradzać** tych, kórzy wprawdzie **nie znają do końca odpowiedzi na pytanie**, ale pewną wiedzę na temat, którego dotyczy pytanie, posiadają.

Zademonstrujemy to na przykładzie.

PYTANIE 12. O funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiemy, że jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$. Wynika stąd, że f

$\boxed{\text{A}}$ jest ciągła w tym przedziale; (TAK)

$\boxed{\text{B}}$ jest ograniczona w tym przedziale; (NIE)

$\boxed{\text{C}}$ posiada funkcję pierwotną w tym przedziale; (TAK)

$\boxed{\text{D}}$ jest rosnąca w tym przedziale; (NIE).

Student wie, że na pewno nie chodzi o D, natomiast co do A, B, i C nie jest całkowicie pewien. Powinien on w tej sytuacji mieć większe szanse na lepszy wynik niż, student, który skreśla zupełnie losowo. Co to oznacza w praktyce? Oznacza to, że wartość oczekiwana liczby zdobytych punktów przy świadomym niezakreśleniu odpowiedzi D i losowym skreślaniu pozostałych odpowiedzi tzn. (A, B i C) powinna być już za to pytanie dodatnia.

Przypuśćmy, że pytanie ma k odpowiedzi. Wtedy prawdopodobieństwo losowego skreślenia poprawnej odpowiedzi wynosi $\frac{1}{k}$ i student otrzymuje wówczas 1 punkt, a prawdopodobieństwo skreśleniania niepoprawnej wynosi $\frac{k-1}{k}$ i student powienien wówczas otrzymać a punktów tak, aby wartość oczekiwana

$$1 \cdot \frac{1}{k} + a\frac{k-1}{k}$$

była mniejsza lub równa równa 0. Stąd $a \leqslant -\frac{1}{k-1}$. Jednocześnie chcemy, aby przy skreślaniu jednej odpowiedzi spośród $k-1$ wartość oczekiwana była już dodatnia.

Wówczas prawdopodobieństwo skreślenia poprawnej odpowiedzi wynosi $\frac{1}{k-1}$, a niepoprawnej $\frac{k-2}{k-1}$, zatem wartość oczekiwana jest równa

$$1 \cdot \frac{1}{k-1} + a\frac{k-2}{k-1}.$$

Chcemy, aby to była wartość dodatnia zatem $a > -\frac{1}{k-2}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$a \in \left(-\frac{1}{k-2}; -\frac{1}{k-1}\right].$$

Jeśli chcemy zniechęcać studenta, który nic nie wie na temat danego pytania do skreślania losowego odpowiedzi powinniśmy przyjąć a minimalnie mniejsze od $-\frac{1}{k-1}$, a jeśli chcemy go tylko nie nagradzać, to należy przyjąć a takie, aby wartość oczekiwana była równa 0, czyli $a = -\frac{1}{k-1}$.

6. Ocenianie testów wielokrotnego wyboru

Przy testach wielokrotnego wyboru nie możemy przyznawać punktów ujemnych, bo w tym wypadku niezaznaczenie odpowiedzi jest zadeklarowaniem się i nie wiadomo, czy student nie zaznaczył dlatego, że zrezygnował z udzielenia odpowiedzi, czy dlatego, że uznał odpowiedź za fałszywą. Dlatego w tym wypadku możemy liczyć tzw. duże i małe punkty i nimi manipulować przy wystawianiu oceny.

Duży punkt przyznamy studentowi, który zakreślił poprawnie wszystkie odpowiedzi w danym pytaniu, natomiast mały za zakreślenie poprawnie jednej odpowiedzi w jakimś pytaniu. Jeśli pytania są przygotowane w ten sposób, że jedno pytanie w całości dotyczy jednego problemu, to naturalnie jeden duży punkty powinien być odpowiednio doceniony, bo on oznacza, że student zna omawiane zagadnienie.

Natomiast *pojedyńczy* mały punkt nie powinien być nagradzany, ponieważ prawdopodobieństwo jego uzyskania wynosi w przypadku losowego skreślania dokładnie $\frac{1}{2}$. Natomiast uzyskanie wyraźnie więcej niż 50% małych punktów już dowodzi, że student musiał niektóre odpowiedzi skreślać wykorzystując swoją wiedzę, a nie tylko losowo.

Rozpatrzmy przykład demonstrujący omawiane sytuacje.

Zakładamy, że test składa się z $2n$ pytań i na każde pytanie jest k odpowiedzi. Wykładowca uznaje, że student znający połowę zagadnień dostaje ocenę dostateczną. Ponieważ nie powinno się karać studenta, który znając dokładnie n zagadnień zaznaczył w tych pytaniach wszystkie odpowiedzi prawidłowe, a w pozostałych skreślał losowo, ale miał pecha i przeważnie nie trafiał (lub zrezygnował z udzielenia odpowiedzi), musimy założyć, że od n dużych punktów przyznajemy ocenę dostateczną niezależnie od sumarycznej liczby małych punktów.

Natomiast większa liczba małych punktów z pozostałych pytań niż wynikająca z zupełnie losowego skreślania sugeruje, że student nie wszystkie odpowiedzi w tych pozostałych pytaniach skreślał losowo, ale w niektórych wypadkach wykorzystywał swoją wiedzę i można mu wystawić w takim wypadku ocenę wyższą.

Przy zupełnie losowym skreślaniu wartość oczekiwana uzyskanych małych punktów z tych pozostałych pytań wynosi $\frac{nk}{2}$. Należy postawić pytanie: od jakiej liczby punktów uzyskanych przez studenta odrzucamy hipotezę: *student skreślał losowo* na rzecz hipotezy przeciwnej *student znał częściowe odpowiedzi na niektóre pytania*? W języku weryfikacji hipotez statystycznych mamy weryfikację hipotezy dotyczącej frakcji elementów wyróżnionych przy danych $p_0 = 0,5$ na rzecz hipotezy przeciwnej $p > 0,5$. Ponieważ próba nie jest zwykle zbyt liczna zastosujemy statystykę [2 str. 98]

$$u_{obl} = \left(2\mathrm{arcsin}\sqrt{\frac{l}{kn}} - 2\mathrm{arcsin}\sqrt{p_0} \right) \sqrt{kn}.$$

Hipotezę odrzucamy, jeśli $u_{obl} > u(1-\alpha)$, gdzie $u(1-\alpha)$ jest odpowiednim kwantylem rozkładu normalnego $N(0,1)$, a α współczynnikiem istotności. Otrzymujemy zatem nierówność

$$l > kn \sin^2 \left(\frac{u(1-\alpha)}{2\sqrt{kn}} + 0,78 \right).$$

Na przykład przy 24 pytaniach testowych (czyli $2n = 24$), czterech odpowiedziach na każde pytanie ($k = 4$) i poziomie istotności $\alpha = 0,05$ mamy $u(0,95) = 1,64$. Otrzymamy wtedy $l > 29,4$, czyli powinniśmy uznać, że student znał częściowo również inne tematy, jeśli uzyskał 12 dużych punktów i w sumie $48 + 30 = 78$ małych punktów.

I od tej granicy możemy stawiać ocenę 3+. Analogicznie można stawiać ocenę dobrą np. za 17 dużych punktów. wtedy pozostałych pytań jest 7, zatem $kn = 28$ i powyższa nierównośc da wynik

$$l > 18.12.$$

Zatem ocenę 4+ można wystawić od granicy 17 dużych i $17 \cdot 68 + 19 = 87$ małych punktów.

Oczywiście trudno wymagać od egzaminatora, zwłaszcza gdy nie jest on specjalistą od matematyki czy statystyki matematycznej, aby za każdym razem przeprowadzał weryfikację hipotezy statystycznej. Ponadto zaproponowane rozwiązania nie są być może jedyne słuszne i mogą być niezbyt zrozumiałe dla studentów powodując ich negatywną reakcję. Problem odpowiedniego ustawienia progów ocen przy testach wymaga dokładnieszych badań i być może stworzenia programu komputerowego (wykorzystującego w zaprezentowany wyżej sposób parametryczne testy istotności) wyliczającego te progi. Wydaje się, że najprościej i najbardziej czytelnie dla studentów można ustawić je wykorzystując wyłącznie duże punkty np. przy teście złożonym z 24 pytań od 12 punktów – 3, od 15 – 3+, od 17 – 4, od 19 – 4+, od 21 – 5, można progi uzależnić od stopnia trudności pytań.

7. Zakończenie

Na zakończenie pewne dane uzasadniejące stosowanie testów. Przez kilka lat autor przeprowadzał egzamin z przedmiotu analiza matematyczna na kierunku matematyka Uniwersytetu Warszawskiego. Egzamin składał się z dwóch części: egzaminu pisemnego w tradycyjnej formie zadań, w którym studenci podawali pełne rozwiązanie oraz testu zastępującego egzamin ustny. Wyniki z obydwu części były zaskakująco zgodne. W sumie na około 1000 zdających studentów w mniej niż 10 przypadkach student otrzymał ocenę pozytywną tylko z jednej części. Pokazuje to, (odpowiedni test istotności to w pełni uzasadnia), że można zredukować egzamin tylko do części testowej i otrzymywane oceny będą zgodne z prezentowanymi umiejętnościami.

Jest pewien minus ograniczania się w sprawdzaniu wiedzy tylko do testów. Testy nie sprawdzają umiejętności prawidłowego opisu rozwiązania, a tego też uczymy studentów i powinniśmy weryfikować. Ale tego typu umiejętności lepiej sprawdzać na podstawie prac domowych czy zaliczeniowych, kiedy student ma możliwość bez egzaminacyjnego stresu spokojnie nad tym opisem popracować, a osoba sprawdzająca może wytknąć zaistniałe błędy i wymagać ich poprawiania (do skutku!).

Natomiast argumenty przeciw testom wysunięte w [6], że „słabo lub wcale nie badają rozumienia” materiału w przypadku typów testów omawianych w tej pracy nie są chyba zasadne.

Bibliografia

[1] Fichtenholz G. M., 1997, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom 1, Wydawnictwo Naukowe PWN,

[2] Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowski K, Wasilewski W, 2000; *Rachunek Prawdopodobieństawa i Statystyka Matematyczna w Zadaniach*, część 2 PWN

[3] Kuratowski K., (1979); Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN

[4] Rusinek J., (2007); *Algorytm permutowania w TeX-u zastosowany do informatyzacji procesu egzaminacyjnego*, „Rocznik Naukowy Wydziału Zarządzania w Ciechanowie", Tom I, (153-174)

[5] Rusinek J., (2008); *Pliki do odczytu i zapisu w TeX-u – zastosowanie do przetwarzania wyników egzaminu* , „Rocznik Naukowy Wydziału Zarządzania w Ciechanowie", Tom II, (107-124)

[6] Internetowe Centrum Zasobów Edukacyjnych MEN, *Uwagi o stosowaniu testu w dydaktyce*,
http://scholaris.pl/cms/index.php/news/show_art?id=436cat_id=260.