

Mariusz Kozakiewicz

ALGORYTM RÓWNOLEGŁEGO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENÍ ELIPTYCZNYCH Z WYKORZYSTANIEM METODY MORTAROWEJ

[**Słowa kluczowe:** równanie eliptyczne drugiego rzędu, metoda elementu skończonego, metoda mortarowa]

Streszczenie. W pracy przedstawiono przybliżoną metodę rozwiązywania zagadnień eliptycznych drugiego rzędu na triangulacjach niezgodnych. Przybliżone rozwiązanie otrzymane zostało przez połączenie metody elementu skończonego z metodą mortarową z tak zwanymi 'zakładkami'. Udowodniono stabilność i oszacowanie błędu metody. Przeprowadzono eksperymenty numeryczne.

Wprowadzenie

Wiele problemów nauki i techniki w sformułowaniu matematycznym prowadzi do zagadnień różniczkowych, które na ogół nie dają się rozwiązać analitycznie, stąd bardzo ważne jest ich rozwiązywanie za pomocą metod przybliżonych. Metoda elementów skończonych wraz z metodą różnic skończonych stanowią dwie podstawowe metody wyznaczania przybliżonego rozwiązania zagadnienia dokładnego. Obydwie metody w sformułowaniu klasycznym nie uwzględniają jednak w pełni własności zagadnienia różniczkowego. Na początku lat 90-tych pojawiła się tak zwana metoda mortarowa pozwalająca uwzględnić regularność rozwiązania. Zapewnia ona uogólnioną ciągłość (w sensie L^2) 'kawałków' rozwiązania otrzymanych na podobszarach mających niezależne od siebie triangulacje [1]. W ostatnich latach rozwinięta została metoda polegająca na wprowadzaniu na pewnych podobszarach dwu niezależnych triangulacji, czyli tak zwanych 'zakładek' [3].

Dekompozycja obszaru, jaka stosowana jest w metodzie mortarowej nie jest podyktowana wyłącznie względami teoretycznymi. Równania różniczkowe opisujące rzeczywistość mają niejednokrotnie na celu przybliżanie zjawisk zachodzących na granicy różnych ośrodków. Metoda mortarowa pozwala w każdym z tych ośrodków przybliżać rozwiązania dokładne niezależnie, a następnie sklejać 'kawałki' rozwiązania w całość. Połączenie metody mortarowej z techniką wykorzystującą 'zakładki' stanowić może alternatywną do już istniejących metod dyskretyzacji i właśnie ten temat został w tej pracy bliżej przedstawiony.

W pracy rozważane jest zagadnienie eliptyczne drugiego rzędu przy specjalnym podziale całego obszaru. Podział obszaru, jak się okaże, pozwoli aby rozwiązanie

rozważanego zagadnienia tylko na podobszarach było odpowiedniej klasy regularności. Na tych podobszarach wprowadzone zostają trzy niezależne triangulacje - na całym obszarze oraz na wydzielonych podobszarach. Idea uzyskiwania rozwiązania przybliżonego polega na mniej dokładnym przybliżeniu rozwiązania na całym obszarze, a kolejno bardziej dokładnym i niezależnym rozwiązywaniu na podobszarach. Rozwiązanie na całym obszarze ma na celu uzyskanie informacji, która poprzez projekcje mortarowe zostanie przekazana na podobszary. Według naszej wiedzy 'zakładkami' w takim ujęciu nikt wcześniej się nie interesował.

W pracy tej korzystać będziemy z podstawowych faktów udowodnionych dla wyżej wymienionych metod. Przystępne wprowadzenie do metody elementów skończonych zawarte jest między innymi w [4][6], wprowadzenie do metody mortarowej można odnaleźć w [1][5][9], opis metody mortarowej z 'zakładkami' można odnaleźć w [3].

Praca składa się z czterech rozdziałów. Pierwszy rozdział zawiera sformułowanie zagadnienia różniczkowego. W rozdziale drugim przedstawione zostało zadanie dyskretnie w przestrzeni z ograniczeniami. Zawarta w nim została analiza poprawności i błędu zadania dyskretnego. Główny wynik tego rozdziału to udowodnione oszacowanie błędu metody. W rozdziale trzecim przedstawione zostały wyniki i analiza eksperymentów dla zadania dyskretnego w przestrzeni z ograniczeniami. Potwierdzają one rezultaty teoretyczne udowodnione w poprzednich rozdziałach. Rozdział ostatni to podsumowanie rezultatów pracy.

Oznaczenia

- $\|\cdot\|_Y, |\cdot|_Y$ - odpowiednio norma i seminorma przestrzeni Y ;
- $\Omega_3 \equiv \Omega$;
- $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$;
- ρ_i - średnica $\Omega_i, i = 1, 2$;
- $\mathcal{T}^{h_i} = \{K_j^{h_i}, j = 1, \dots, M_i\}$ - standardowa zgodna triangulacja na Ω_i ;
 $K_j^{h_i}$ - element trójkątny, M_i - liczba trójkątów, $i=1, 2, 3$;
- $\delta_i = \partial\Omega_i \cap \Omega, i = 1, 2$;
- $\Gamma \equiv \gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$;
- Ω_{ih} - zbiór punktów nodalnych Ω_i ;
- $a_1^i, \dots, a_{m_i}^i \equiv \delta^{h_i}$ - wewnętrzne punkty $\bar{\delta}_i$ pochodzące z $T^{h_i}(\bar{\Omega}_i), i=1, 2$;
- $a_0^i, a_{m_i+1}^i$ - krańcowe punkty $\bar{\delta}_i, i = 1, 2$;
- γ^h - zbiór punktów nodalnych γ ;
- $X^{h_i} \equiv X^{h_i}(\Omega_i)$ - przestrzeń ciągłych, trójkątami liniowych funkcji określonych na Ω_i , znikających odpowiednio dla $i=1, 2, 3$ na:
 - $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$;

- $\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$;
- $\partial\Omega$;
- φ^i - funkcja bazowa przestrzeni X_i^h , $i=1,2,3$;
- $X^h \equiv X^h(\Omega) = X^{h_1}(\Omega_{h_1}) \times X^{h_2}(\Omega_2) \times X^{h_3}(\Omega_3) =$
 $= \{(u_1, u_2, u_3), u_i \in X^{h_i}(\Omega_i), i = 1, 2, 3\}$;
- $V^{h_i}(\delta_i)$ - obcięcie $X^{h_i}(\Omega_i)$ do δ_i , $\dim V^{h_i}(\delta_i) = m_i$ $i=1,2$;
- $V^{h_3}(\gamma)$ - obcięcie X^{h_3} do γ , $\dim V^{h_3}(\gamma) = m_3$;
- Π_i - projekcje mortarowe z przestrzeni $V^{h_3}(\gamma)$ na przestrzeń $V^{h_i}(\delta_i)$, $i=1,2$;
- $V^h \equiv V^h(\Omega)$ - przestrzeń z ograniczeniami - podprzestrzeń funkcji X^h spełniających warunki projekcji mortarowych;
- Φ^k - funkcja bazowa przestrzeni V^h ,
 $k = 1, \dots, \{card(\Omega_{1h}) + card(\Omega_{2h}) + card(\Omega_{3h})\}$;
- $\tilde{W}_{h_i}(\delta_i)$ - przestrzeń ciągłych, określonych na δ_j , kawałkami liniowych funkcji na siatce $a_0^i, \dots, a_{m_i+1}^i$, stałych na odcinkach $[a_0^i, a_1^i]$ oraz $[a_{m_i}^i, a_{m_i+1}^i]$, dla $i = 1, 2$;
wymiar przestrzeni $\tilde{W}_{h_i}(\delta_i)$ wynosi $\dim \tilde{W}_{h_i}(\delta_i) = m_i$ i jest równy wymiarowi przestrzeni $V^{h_i}(\delta_i)$.
- $\square$ - koniec dowodu.

1. Sformułowanie zagadnienia

Rozważamy zagadnienie brzegowe dla równania różniczkowego eliptycznego drugiego rzędu. Sformułowanie klasyczne ma postać:

znaleźć $u^* \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ takie że:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^2 D_i(a_{ij}u D_j u) = f & x \in \Omega; \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

gdzie Ω jest wielokątnym otwartym obszarem w $\mathbb{R}^2$.

Sformułowanie uogólnione zagadnienia (1.1) ma postać:

znaleźć takie $u^* \in H_0^1(\Omega)$, że:

$$a(u^*, v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.2)$$

gdzie:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} D_i u D_j v dx, \quad f(v) = \int_{\Omega} f v dx. \quad (1.3)$$

Tutaj $H_0^1(\Omega)$ jest przestrzenią Sobolewa, (zob.[7]) funkcji należących wraz z pochodnymi uogólnionymi do $L^2(\Omega)$ i zerujących się na $\partial\Omega$ w sensie śladu w L^2 . Zakładamy ponadto, że $a_{i,j} \in C(\Omega)$ i że

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= a_{j,i}, \\ \exists \gamma_0 > 0 \quad \forall (x \in \bar{\Omega}, \varsigma = [\varsigma_1, \varsigma_2] \in \mathbb{R}^2, \varsigma \neq 0), \\ \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \varsigma_i \varsigma_j &\geq \gamma_0 \sum_{i=1}^2 \varsigma_i^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

oraz $f \in L^2(\Omega)$. Przy przyjętych założeniach zagadnienie (1.2) jest poprawnie postawione (zob.np [7]). W pracy poszukuje się rozwiązania przybliżonego zagadnienia (1.2).

2. Przestrzeń z ograniczeniami

2.1. Zadanie w przestrzeni z ograniczeniami

Punktem wyjścia do rozważań zawartych w tej pracy jest sposób przybliżonego rozwiązywania zagadnień eliptycznych dyskretyzowanych metodą elementów skończonych na triangulacjach niezgodnych z użyciem metody mortarowej. O metodzie tej można się dowiedzieć min. z pionierskiej pracy [1]. Skrócony opis tej metody przedstawia się następująco:

Obszar Ω z zagadnienia (1.2) zostaje podzielony na dwa rozłączne podobszary tak, że $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ oraz $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Oznaczamy $\delta = \partial\Omega_1 \cap \Omega$, $\gamma = \partial\Omega_2 \cap \Omega$. Na każdym z podobszarów zadane są niezależne zgodne triangulacje $\bar{T}^{h_i}$ z elementami trójkątnymi i parametrem h_i (zob.[4][6]). Zauważmy, że na $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ są one niezgodne. Osobno na każdym z podobszarów wprowadzmy przestrzenie elementu skończonego $\bar{X}^h(\Omega_i)$ (np. funkcji trójkątami liniowych) oraz ich obciecia $\bar{V}^{h_1}(\delta)$, $\bar{V}^{h_2}(\gamma)$ odpowiednio do δ i γ . Pojęciem podstawowym dla dalszego postępowania jest kluczowa *projekcja mortarowa*:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} : \bar{V}^{h_2}(\gamma) &\longrightarrow \bar{V}^{h_1}(\delta) \\ \forall \varphi \in L^2(\gamma) \quad \int_{\delta} (\varphi - \bar{\Pi}\varphi) \psi ds &= 0 \quad \forall \psi \in \bar{W}_{h_1}(\delta) \\ \bar{\Pi}\varphi &= 0 \quad x \in \partial\delta; \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie $\bar{W}_{h_1}(\delta)$ jest to przestrzeń funkcji kawałkami liniowych, których triangulacja jest związana z triangulacją na Ω_1 . Standardowo przyjęło się nazywać stroną mortarową stroną, z której następuje rzutowanie (γ), a stroną niemortarową, tę na którą odbywa się rzutowanie (δ). Projekcja mortarowa pozwala utrzymać uogólnioną ciągłość 'kawałków rozwiązania' otrzymanych na podobszarach Ω_1, Ω_2 . Przy znajomości rozwiązania na γ możemy za rozwiązanie na δ przyjąć $u|_{\delta} = \bar{\Pi}u|_{\gamma}$.

Rozwiązań w metodzie mortarowej poszukiwać będziemy w *przestrzeni z ograniczeniami* $\bar{V}^h(\Omega)$:

$$\bar{V}^h(\Omega) = \{(u_1, u_2) \in X^{h_1}(\Omega_1) \times X^{h_2}(\Omega_2); u_1|_{\delta} = \bar{\Pi}u_2|_{\gamma}\}.$$

Algorytm równoległego rozwiązywania zagadnień...

Sformułowanie uogólnione dla zagadnienia (1.2) za pomocą metody mortarowej przedstawia się następująco (zob.[1][9]):

znaleźć $u_h^* = (u_1, u_2) \in \bar{V}^h$ takie że:

$$\bar{a}_h(u_h^*, v) = \bar{f}_h(v), \quad \forall v \in \bar{V}^h, \quad (2.2)$$

gdzie:

$$\bar{a}_h(u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \sum_{k,l=1}^2 a_{kl} D_k u_i D_l v_i dx, \quad \bar{f}_h(v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f_i v_i dx, \quad (2.3)$$

$$f_i = f|_{\Omega_i}.$$

Przy założeniu $u^*|_{\Omega_i} \in H^2(\Omega_i)$ dla $i=1, 2$ metoda mortarowa daje następujące oszacowanie błędu (zob.[1][9]):

$$|||u^* - u_h^*|||_h \leq \sum_{i=1}^2 h_i \cdot |u^*|_{H^2(\Omega_i)},$$

gdzie u^*, u_h^* oznaczają odpowiednio rozwiązanie dokładne (1.2) i przybliżone (2.2), $H^2(\Omega)$ to przestrzeń Sobolewa funkcji, których pochodne oraz drugie pochodne są całkowale w kwadracie na Ω (patrz [4][7]),

$$|||u|||_h^2 = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 dx.$$

Zauważmy, że $||| \cdot |||_h$ jest normą, bowiem $u = 0$ na $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$.

Po tym krótkim wprowadzeniu do metody mortarowej możemy przystąpić do głównego tematu pracy, którym jest rozwiązanie zagadnienia (1.2) przy specyficznym podziale obszaru Ω oraz przy użyciu metody elementu skończonego i metody mortarowej z 'zakładkami'.

Obszar Ω tym razem zostaje podzielony na dwie części $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ tego samego rzędu wielkości. Za podział Ω przyjmujemy $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ gdzie $\Omega_3 \equiv \Omega$. Na każdym z trzech obszarów wprowadzamy niezależne zgodne triangulacje $\mathcal{T}^{h_i}$, niezgodne na $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \equiv \gamma$ (Rysunki 1, 2, 3). Z tymi triangulacjami wiążemy dla $i=1, 2, 3$ przestrzenie $X^{h_i}(\Omega_i) \equiv X^{h_i}$ funkcji ciągłych trójkątami liniowymi, zerujących się odpowiednio dla:

- $i=1$ na $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$,
- $i=2$ na $\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$,
- $i=3$ na $\partial\Omega$.

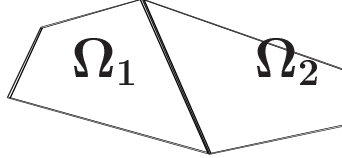
Dla każdej triangulacji określamy $h_i = \max_{K \in \mathcal{T}^{h_i}} h_K$ oraz zakładamy, że:

$$\forall K \in \mathcal{T}^{h_i} \quad \frac{h_i}{h_K} \leq \nu, \quad \frac{h_i}{\rho_K} \leq \sigma,$$

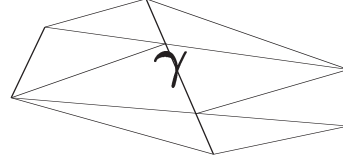
gdzie:

$$\rho_K = \sup\{diam(S), S - \text{kula zawarta w } K\}.$$

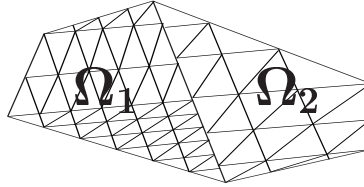
Są to naturalne założenia w metodzie elementu skończonego (zob.[4][6]). Oznaczmy przez $\delta_i = \partial\Omega_i \cap \Omega$.



Rysunek 1 : Podział obszaru Ω .



Rysunek 2 : Triangulacja Ω .



Rysunek 3 : Triangulacje na podobszarach Ω .

Podział obszaru Ω jest najczęściej podyktowany związkami z zadaniem fizycznym. Może on być spowodowany nieciągłością współczynników rozpatrywanego zagadnienia.

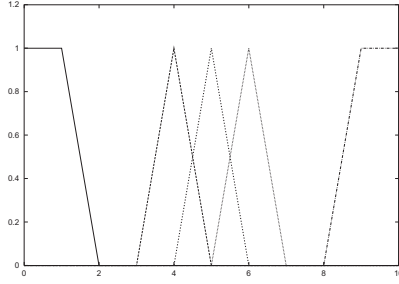
Ponieważ dokonany został sztuczny podział całego obszaru Ω , występuje potrzeba sklejenia ze sobą rozwiązań otrzymanych na Ω_i , $i=1, 2, 3$. Zdefiniujemy teraz projekcje mortarowe. Niech

- $V^{h_i}(\delta_i)$ - obcięcie X^{h_i} do δ_i , $\dim V^{h_i}(\delta_i) = m_i$ $i=1, 2$;
- $V^{h_3}(\gamma)$ - obcięcie X^{h_3} do γ , $\dim V^{h_3}(\gamma) = m_3$;
- $a_1^i, \dots, a_{m_i}^i \equiv \delta^{h_i}$ - wewnętrzne nodalne punkty $\bar{\delta}_i$ pochodzące z $\mathcal{T}^{h_i}(\bar{\Omega}_i)$ $i=1, 2$;
- $a_0^i, a_{m_i+1}^i$ - krańcowe punkty $\bar{\delta}_i$ $i = 1, 2$;
- $\tilde{W}_{h_i}(\delta_i)$ - przestrzeń ciągłych, określonych na δ_i , kawałkami liniowych funkcji na siatce $a_0^i, \dots, a_{m_i+1}^i$, stałych na odcinkach: $[a_0^i, a_1^i]$ oraz $[a_{m_i}^i, a_{m_i+1}^i]$, dla $i = 1, 2$; wymiar przestrzeni $\tilde{W}_{h_i}(\delta_i)$ wynosi: $\dim \tilde{W}_{h_i}(\delta_i) = m_i$ i jest równy wymiarowi przestrzeni $V^{h_i}(\delta_i)$.
- Projekcje mortarowe:

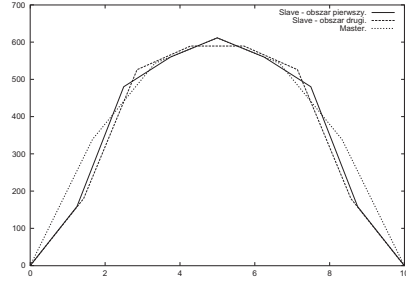
$$\begin{aligned} \Pi_i : V^{h_3}(\gamma) &\longrightarrow V^{h_i}(\delta_i), \\ \forall \varphi \in L^2(\gamma) \quad \int_{\delta_i} (\varphi - \Pi_i \varphi) \psi ds &= 0 \quad \forall \psi \in \tilde{W}_{h_i}(\delta_i), \\ \Pi_i \varphi &= 0 \quad x \in \partial\delta_i, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Algorytm równoległego rozwiązywania zagadnień...

Stronę, z której następuje rzutowanie mortarowe γ w dalszej części pracy nazywać będziemy stroną mortarową. Strony, na które odbywa się rzutowanie mortarowe δ_1, δ_2 , to strony niemortarowe. Zauważmy, że δ_1, δ_2 są krawędziami odpowiednio Ω_1, Ω_2 oraz $\gamma \subset \Omega_3$, $\gamma = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ i że geometrycznie $\delta_1 = \delta_2 = \gamma$.



Rysunek 4 : Funkcje bazowe przestrzeni $\tilde{W}_{h_i}(\delta_i)$.



Rysunek 5 : Projekcje mortarowe.

Wprowadźmy podprzestrzeń $V^h(\Omega)$ przestrzeni $X^h(\Omega)$

$$X^h(\Omega) \equiv X^{h_1}(\Omega_1) \times X^{h_2}(\Omega_2) \times X^{h_3}(\Omega_3),$$

w której będziemy poszukiwali rozwiązania przybliżonego zagadnienia (1.2). Przestrzeń z ograniczeniami (przestrzeń rozwiązań), definiujemy następująco

$$V^h \equiv V^h(\Omega) = \{(u_1, u_2, u_3) \ ; \ u_i \in X^{h_i}(\Omega_i); \\ u_1|_{\delta_1} = \Pi_1(u_3|_{\gamma}); \ u_2|_{\delta_2} = \Pi_2(u_3|_{\gamma}) \}.$$

Sformułowanie zagadnienia dyskretnego w przestrzeni z ograniczeniami ma postać: znaleźć $u_h^* = (u_1, u_2, u_3) \in V^h$, takie że:

$$a_h(u_h^*, v) = f_h(v), \quad \forall v \in V^h, \quad (2.5)$$

gdzie:

$$a_h(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \sum_{k,l=1}^2 a_{kl} D_k u_i D_l v_i dx, \quad f_h(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} f_i v_i dx, \quad (2.6) \\ f_i = f|_{\Omega_i}.$$

Zauważyć należy, że jeśli triangulacje na całym obszarze i na jego podobszarach pokrywają się, to $a_h(u, v)$ pokrywa się z $a(u, v)$, zaś $f_h(v)$ pokrywa się z $f(v)$, stąd współczynnik $\frac{1}{2}$ przed formami w (2.6).

Analiza poprawności (2.5) (istnienie, jednoznaczność, stabilność) przedstawiona zostanie w podrozdziale (2.4).

2.2 Funkcje bazowe przestrzeni z ograniczeniami

Aby zapisać (2.5) w postaci macierzowej należy zdefiniować funkcje bazowe w $V^h(\Omega)$. W tym celu wprowadźmy:

- φ^i - standardowa funkcja bazowa X^i $i = 1, 2, 3$ (zob.np.[4][6]);
- Ω_{ih} - zbiór punktów nodalnych Ω_i $i = 1, 2, 3$;
- γ^h - zbiór punktów nodalnych γ ;

Funkcje bazowe na V^h mają postać: $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, gdzie:

- $\Phi^k = (\varphi_k^1$ na $\overline{\Omega}_1$, 0 na $\overline{\Omega}_2$, 0 na $\overline{\Omega}_3$) dla $x_k \in \Omega_{1h}$;
- $\Phi^k = (0$ na $\overline{\Omega}_1$, φ_k^2 na $\overline{\Omega}_2$, 0 na $\overline{\Omega}_3$) dla $x_k \in \Omega_{2h}$;
- $\Phi^k = (0$ na $\overline{\Omega}_1$, 0 na $\overline{\Omega}_2$, φ_k^3 na $\overline{\Omega}_3$) dla $x_k \in \Omega_{3h} \setminus \gamma^h$;
- $\Phi^k = (\Pi_1 \varphi_k^3$ na δ_1 i 0 na $\Omega_1 \setminus \delta_1$, $\Pi_2 \varphi_k^3$ na δ_2 i 0 na $\Omega_2 \setminus \delta_2$, φ_k^3 na $\overline{\Omega}_3$) dla $x_l \in \gamma^h$.

Zauważmy, że tak wybrane funkcje spełniają warunki mortarowe na δ_1, δ_2 , czyli są elementami V^h , a wymiar $V^h = \dim V^h = \text{card}(\Omega_{1h}) + \text{card}(\Omega_{2h}) + \text{card}(\Omega_{3h})$.

2.3. Postać macierzowa

Oznaczmy przez N wymiar przestrzeni V^h . Rozpiszmy u_h^* zadania (2.5) na wprowadzonych funkcjach bazowych, tzn.:

$$\begin{aligned} u_h^* &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \Phi_k = \\ &= \sum_{x_k \in \Omega_{1h}} u_1(x_k) \Phi^k(x) + \sum_{x_k \in \Omega_{2h}} u_2(x_k) \Phi^k(x) + \sum_{x_k \in \Omega_{3h}} u_3(x_k) \Phi^k(x). \end{aligned}$$

Zauważmy, że α_k są wartościami u_i w punktach nodalnych $x_k \in \Omega_{ih}$. Podstawiając tą postać do (2.5) oraz przyjmując za v kolejnych funkcji bazowych Φ^k przestrzeni V^h otrzymujemy algebraiczny układ równań:

$$A \underline{u}_h = \underline{f}_h, \quad (2.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \underline{u}_h &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \underline{f}_h = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \\ f_k &= f(\Phi^k), \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

oraz:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A}_3 & K_1 & K_2 \\ K_1^T & A_1 & 0 \\ K_2^T & 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

2.3.1. Ogólne własności macierzy układu

Macierz A jest macierzą blokową, symetryczną i dodatnio określoną. Bloki znajdujące się na diagonalu A są rozrzedzone (kilkudiagonalne). Symetryczność A wynika z jej struktury oraz symetryczności bloków znajdujących się na jej diagonalu. Dodatnia określoność jest wynikiem dodatniej określoności formy $a_h(u, v)$. Wynika to z założeń o formie $a_h(u, v)$.

Do wykazania uwarunkowania macierzy A potrzebny jest następujący:

Lemat 2.1 ([8], Twierdzenie 4.5, str.64). *Dla każdego $u \in \bar{V}^h(\Omega)$ - przestrzeń z ograniczeniami klasycznej metody mortarowej, zachodzi:*

$$c \sum_{i=1}^2 \|u\|_{L(\Omega_i)}^2 \leq \bar{a}_h(u, u) \leq C \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^2 \|u\|_{L^2(\Omega_i)}^2,$$

gdzie stałe c, C nie zależą od podziału obszaru Ω na podobszary Ω_1, Ω_2 , $h = \min\{h_1, h_2\}$, zaś $\bar{a}_h(u, v)$ jest postaci (2.2).

Twierdzenie 2.1. *Przy przyjętych założeniach o triangulacjach uwarunkowanie macierzy A układu (2.7) wynosi $\text{cond}(A) = O(\frac{1}{h^2})$, gdzie $h = \min\{h_1, h_2, h_3\}$.*

Dowód. Mamy

$$(Au, v)_{l^2} = a_h(u, v), \quad \forall u, v \in X^h.$$

Na mocy **Twierdzenia Rayleigh-Ritz'a** [4]:

$$\lambda_{\max}(A) = \sup_{u \in V^h} \frac{(Au, u)_{l^2}}{\|u\|_{l^2}^2}, \quad \lambda_{\min}(A) = \inf_{u \in V^h} \frac{(Au, u)_{l^2}}{\|u\|_{l^2}^2}, \quad (2.8)$$

gdzie $\lambda_{\max}(A), \lambda_{\min}(A)$ oznaczają odpowiednio największą i najmniejszą wartość własną macierzy A . Można zauważyć, że postać (2.5) jest równoważna dwum standardowym zagadnieniom mortarowym przy podziale całego obszaru Ω w sposób następujący: dla pierwszego zadania $\tilde{\Omega}_1 \equiv \Omega_1$, $\tilde{\Omega}_2 \equiv \Omega_3|_{\Omega_2}$ (tj. Ω_2 z triangulacją z Ω_3), a dla drugiego $\tilde{\Omega}_1 \equiv \Omega_3|_{\Omega_1}$ (tj. Ω_1 z triangulacją z Ω_3), $\tilde{\Omega}_2 \equiv \Omega_2$. Dla pierwszego zagadnienia mortarowego forma dwuliniowa $a_{h_1}(u, v)$ miałaby postać:

$$a_{h_1}(u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{\Omega}_i} \sum_{k,l=1}^2 a_{kl} D_k u \cdot D_l v dx,$$

$a_{h_2}(u, v)$ dla drugiego:

$$a_{h_2}(u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{\Omega}_i} \sum_{k,l=1}^2 a_{kl} D_k u \cdot D_l v dx,$$

a więc:

$$a_h(u, v) = \frac{1}{2} \{a_{h_1}(u, v) + a_{h_2}(u, v)\}.$$

Mamy zatem na mocy Lematu 2.1:

$$\begin{aligned} A(u, u) &= a_h(u, u) = \frac{1}{2} \{a_{h_1}(u, v) + a_{h_2}(u, v)\} \geq \\ &\geq c_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} + c_2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \geq c \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} A(u, u) &= a_h(u, u) = \frac{1}{2} \{a_{h_1}(u, v) + a_{h_2}(u, v)\} \leq \\ &\leq \frac{C_1}{h_{13}^2} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C_2}{h_{23}^2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{h_m^2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

gdzie $h_{13} = \min\{h_1, h_3\}$, $h_{23} = \min\{h_2, h_3\}$, $h_m = \min\{h_{13}, h_{23}\}$. A zatem uwarunkowanie macierzy zadania (2.7) na mocy (2.8) wynosi:

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} = O\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

□

2.4. Poprawność zagadnienia

Ponieważ funkcje $u \in V^h(\Omega)$ zerują się na brzegu $\partial\Omega$ możemy wprowadzić w V^h normę:

$$\|v\|_h^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla v dx. \quad (2.9)$$

Twierdzenie 2.2. *Zadanie (2.5) jest poprawnie postawione, tzn. ma jednoznaczne i stabilne rozwiązanie.*

Dowód. Opierając się na *Lemacie Laxa-Milgrama*, ([7], Tw.1.2, str.272)

- $a_h(u, v)$ jest V^h - ciągła, tzn.:
 $\exists C_c > 0 \quad \forall u, v \in X^h \quad |a_h(u, v)| \leq C_c \|u\|_h \|v\|_h$.
 Można to pokazać wykorzystując nierówności *Schwarza* oraz nierówność *Cauchy'ego*:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2. \quad (2.10)$$

Mamy:

$$\begin{aligned} |a_h(u, v)| &= \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \sum_{k,l=1}^2 a_{kl} D_k u_i \cdot D_l v_i \, dx \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \sum_{k,l=1}^2 |D_k u_i| |D_l v_i| \, dx \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{M}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k,l=1}^2 \left(\int_{\Omega_i} |D_k u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega_i} |D_l v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq 4 \cdot \frac{M}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega_i} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \sqrt{4M} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 dx \right) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\Omega_i} |\nabla v|^2 dx \right)} \leq \\
 &\leq C_c \|u\|_h \|v\|_h.
 \end{aligned}$$

- $a_h(u, v)$ jest V^h - eliptyczna, tzn.:
 $\exists C_e > 0 \quad \forall u \in V^h \quad |a_h(u, u)| \geq C_e \|u\|_h^2$.
 Ponieważ zagadnienie wyjściowe jest typu eliptycznego mamy:

$$\begin{aligned}
 &\exists \gamma_0 > 0 \quad \forall (x \in \bar{\Omega}, \varsigma \in \mathbb{R}^2, \varsigma \neq 0), \\
 &\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \varsigma_i \varsigma_j \geq \gamma_0 \sum_{i=1}^2 \varsigma_i^2.
 \end{aligned}$$

Tak więc:

$$\begin{aligned}
 |a_h(u, u)| &= \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \sum_{k,l=1}^2 a_{k,l} D_k u D_l u dx \right| \geq \\
 &\geq \gamma_0 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \sum_{k=1}^2 (D_k u)^2 dx = \frac{\gamma_0}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} (\nabla u)^2 dx = \\
 &= \gamma_0 \|u\|_h^2 = C_e \|u\|_h^2.
 \end{aligned}$$

- Ciągłość $f_h(v)$:

$$\begin{aligned}
 |f_h(v)| &= \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} f_i v_i dx \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} |f_i v_i| dx \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\Omega_i} |f_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_i} |v_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \left(\int_{\Omega_3} |f_3|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\Omega_i} |v_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} \leq \\
 &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{3 \sum_{i=1}^3 \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_h.
 \end{aligned}$$

□

2.5. Oszacowanie błędu

Oznaczmy przez u^* rozwiązanie dokładne (1.2), a przez u_h^* rozwiązanie przybliżone (2.5). Na mocy *Drugiego Lematu Strang'a* ([4], Twierdzenie 4.2.2, str.210), błąd rozwiązania dokładnego względem rozwiązania przybliżonego szacujemy, z nierówności:

$$\|u^* - u_h^*\|_h \leq 2 \inf_{v \in V^h} \|u^* - v\|_h + \sup_{0 \neq w \in V^h} \frac{|f_h(w) - a_h(u^*, w)|}{\|w\|_h}. \quad (2.11)$$

Pierwszy wyraz prawej strony powyższej nierówności nazywamy *błędem aproksymacji*, drugi natomiast *błędem zgodności*.

Do dalszych dowodów potrzebne będą:

Lemat 2.2 ([1], **Lemat 2.4, str.13**). *Niech Q_i - ortogonalna projekcja*

$$Q_i : L^2(\delta_i) \longrightarrow \tilde{W}_{h_i}(\delta_i) \quad i = 1, 2.$$

Wtedy $\forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\delta_i)$ zachodzi:

$$\|v - Q_i v\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_i))'} \leq C \cdot h \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\delta_i)}.$$

Lemat 2.3 ([3], **Lemat 5.4, str.592**). *Dla $i=1, 2$ projekcje mortarowe Π_i są ograniczone w $L^2(\delta_i)$, tzn:*

$$\|\Pi_i w\|_{L^2(\delta_i)} \leq C_L \|w\|_{L^2(\delta_i)} \quad \forall w \in L^2(\delta_i) \quad (2.12)$$

oraz projekcje Π_i są ograniczone w $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)$, tzn:

$$\|\Pi_i w\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} \leq C_H \|w\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} \quad \forall w \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i), \quad (2.13)$$

gdzie C_L, C_H są stałymi niezależnymi od parametrów siatki.

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia. Niech dla $i=1, 2$:

- $\bar{\Omega}^{h_i}$ - podobzar Ω wszystkich domkniętych trójkątów $\tilde{K}_j^{h_i}$ takich, że: $K_j^{h_i} \in \mathcal{T}^{h_i}$ oraz $K_j^{h_i} \in \Omega_i \cap \Omega_3$.
- $V^{h_i}(\Omega^{h_i})$ - przestrzeń funkcji ciągłych trójkątami liniowych na Ω^{h_i} , które zerują się na $\partial\Omega^{h_i} \setminus \delta_i$.
- $\mathcal{H}^{h_i}$ - dyskretny operator harmoniczny określony na $V^{h_i}(\Omega^{h_i})$, przyjmujący zadane wartości brzegowe na δ_i oraz zero na $\partial\Omega^{h_i} \setminus \delta_i$.

Lemat 2.4 ([3], **Lemat 5.10, str.596**). *Istnieje stała $C \geq 0$ niezależna od h_i , taka że:*

$$|\mathcal{H}^{h_i} w|_{H^1(\Omega_i)}^2 \leq C \|w\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)}^2 \quad \forall w \in V^{h_i}(\delta_i). \quad (2.14)$$

Twierdzenie 2.3. Niech $z_i \in V^{h_i}(\Omega_i)$ - ciągłą, trójkątami liniową interpolacją $u^*|_{\Omega_i} = u_i^*$ w punktach nodalnych $\mathcal{T}^{h_i}$. Niech dla $i=1, 2$:

$$\begin{cases} r^i = \Pi_i(z_3(\delta_i)) - z_i; \\ v_i = z_i + \mathcal{H}^{h_i} r^i. \end{cases} \quad (2.15)$$

Tak wybrane v_i należą do $X^{h_i}(\Omega_i)$ oraz spełniają warunki zgodności tzn. $\Pi_i v_3|_{\delta} = v_i|_{\delta_i}$ na δ_i , dla $i = 1, 2$.

Dowód. Należy sprawdzić, czy $v_i|_{\delta_i} = \Pi_i(v_3|_{\delta_i})$. Ponieważ

$$\int_{\delta_i} (v_3|_{\delta_i} - \Pi_i v_3|_{\delta_i}) \psi^i ds = 0 \quad \psi^i \in \tilde{W}_{h_i}(\delta_i),$$

trzeba pokazać, że:

$$\int_{\delta_i} (v_3|_{\delta_i} - v_i|_{\delta_i}) \psi^i ds = 0, \quad \psi^i \in \tilde{W}_{h_i}(\delta_i).$$

Mamy:

$$v_3 = z_3 \quad \text{oraz} \quad v_i = z_i + \mathcal{H}^{h_i}(\Pi_i(z_3|_{\delta_i}) - z_i).$$

Zatem:

$$\begin{aligned} & \int_{\delta_i} (z_3|_{\delta_i} - z_i|_{\delta_i} - \mathcal{H}^{h_i}(\Pi_i(z_3|_{\delta_i}) - z_i)|_{\delta_i}) \psi^i ds = \\ &= \int_{\delta_i} (z_3|_{\delta_i} - z_i|_{\delta_i} - (\Pi_i(z_3|_{\delta_i}) - z_i)|_{\delta_i}) \psi^i ds = \\ &= \int_{\delta_i} (z_3|_{\delta_i} - \Pi_i(z_3|_{\delta_i})) \psi^i ds = 0 \end{aligned}$$

z definicji projekcji mortarowych, co kończy dowód. $\square$

2.5.1 Błąd aproksymacji

Twierdzenie 2.4. Wyrażenie na błąd aproksymacji przyjmuje postać:

$$\|u^* - v\|_h \leq C \left\{ (h_1 + h_3) \|u^*\|_{H^2(\Omega_1)} + (h_2 + h_3) \|u^*\|_{H^2(\Omega_2)} \right\}. \quad (2.16)$$

Dowód. Niech $z_i \in V^{h_i}(\Omega_i)$ - ciągłą, trójkątami liniową interpolacją $u^*|_{\Omega_i} = u_i^*$ w punktach wewnętrznych $\mathcal{T}^{h_i}$, $i = 1, 2, 3$. Według standardów interpolacji [4]:

$$\|u_i^* - z_i\|_{L^2(\Omega_i)} + h_i \|u_i^* - z_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C h_i^2 \|u_i^*\|_{H^2(\Omega_i)} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3. \quad (2.17)$$

Wybrane w ten sposób z_i należy do V^{h_i} dla $i = 1, 2, 3$, ale $z = (z_1, z_2, z_3) \notin V^h$ (nie są spełnione warunki mortarowe na δ_i oraz δ_2).

Wybieramy v_i zgodnie z Twierdzeniem 2.3.

Z warunku trójkąta wyrażenie na błąd aproksymacji przekształcamy do:

$$|u_i^* - v_i|_{H^1(\Omega_i)} \leq |u_i^* - z_i|_{H^1(\Omega_i)} + |\mathcal{H}^{h_i} r^i|_{H^1(\Omega_i)}. \quad (2.18)$$

Pierwszy z członów nierówności (2.18) szacuje się przez (- interpolacja):

$$|u_i^* - z_i|_{H^1(\Omega_i)} \leq Ch_i \|u_i^*\|_{H^2(\Omega_i)}. \quad (2.19)$$

Korzystając z Lematu 2.4 w celu oszacowania drugiego członu (2.18), przekształcamy w pierwszej kolejności, dla $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \|r^i\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} &= \|\Pi_i z_3 - z_i\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} = \|\Pi_i z_3 - \Pi_i z_i\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} = \\ &= \|\Pi_i z_3 - \Pi_i u_i^* - \Pi_i z_i + \Pi_i u_i^*\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} \leq \\ &\leq \|\Pi_i z_3 - \Pi_i u_i^*\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} + \|\Pi_i z_i - \Pi_i u_i^*\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Korzystając z $H_{00}^{\frac{1}{2}}$ -stabilności projekcji Π_i (Lemat 2.3 - 2.13) doprowadzamy (2.20) do:

$$\|r^i\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} \leq C_i \left\{ \|z_3 - u_i^*\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} + \|z_i - u_i^*\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} \right\}.$$

Dla $i=1, 2, 3$, $j = 1, 2$ mamy:

$$\|z_i - u^*\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_j)} \leq C_i h_i \|u^*\|_{H^2(\Omega_j)}. \quad (2.21)$$

Zatem, dla $i = 1, 2$:

$$\|r^i\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} \leq C(h_i + h_3) \cdot \|u^*\|_{H^2(\Omega_i)}. \quad (2.22)$$

Możemy więc dla $i = 1, 2$, drugi człon nierówności (2.18) oszacować następująco

$$|\mathcal{H}^{h_i} r^i|_{H^1(\Omega_i)} \leq C(h_i + h_3) \|u^*\|_{H^2(\Omega_i)}. \quad (2.23)$$

Zatem nierówność (2.18) przekształcamy, korzystając z nierówności (2.19) i (2.23) do postaci:

$$|u_i^* - v_i|_{H^1(\Omega_i)} \leq C\{h_i + h_3\} \|u^*\|_{H^2(\Omega_i)}, \quad (2.24)$$

gdzie $i = 1, 2$.

Wyrażenie na kwadrat błędu aproksymacji przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} \|u^* - v\|_h^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \nabla(u_i^* - v_i)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \nabla(u_1^* - v_1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \nabla(u_2^* - v_2)^2 dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \nabla(u_3^* - v_3)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \nabla(u_3^* - v_3)^2 dx \leq \\
 & \leq \frac{C}{2} \left\{ |u_1^* - v_1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |u_2^* - v_2|_{H^1(\Omega_2)}^2 + |u_3^* - v_3|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |u_3^* - v_3|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right\} = \\
 & = \frac{C}{2} \left\{ |u_1^* - v_1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |u_2^* - v_2|_{H^1(\Omega_2)}^2 + |u_3^* - z_3|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |u_3^* - z_3|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Korzystając z (2.17) i (2.24) przekształcamy dalej

$$\begin{aligned}
 & \|u^* - v\|_h^2 \leq \\
 & \leq C_1 \left\{ (h_1 + h_3)^2 \|u^*\|_{H^2(\Omega_1)}^2 + (h_2 + h_3)^2 \|u^*\|_{H^2(\Omega_2)}^2 + \right. \\
 & \quad \left. + h_3^2 \|u^*\|_{H^2(\Omega_1)}^2 + h_3^2 \|u^*\|_{H^2(\Omega_2)}^2 \right\} \leq \\
 & \leq C_2 \left\{ (h_1 + h_3)^2 \|u^*\|_{H^2(\Omega_1)}^2 + (h_2 + h_3)^2 \|u^*\|_{H^2(\Omega_2)}^2 \right\} \leq \\
 & \leq C_3 \left\{ (h_1 + h_3) \|u^*\|_{H^2(\Omega_1)} + (h_2 + h_3) \|u^*\|_{H^2(\Omega_2)} \right\}^2.
 \end{aligned}$$

□

2.5.2. Błąd zgodności

Dowód oszacowania błędu zgodności, ze względów technicznych, zostanie przeprowadzony dla zadania:

$$\begin{aligned}
 -\Delta u &= f & x \in \Omega, \\
 u(x) &= 0 & x \in \partial\Omega.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Jest to szczególny przypadek zadania (1.1) ($a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ oraz $a_{ii} = 1$, dla $i, j=1, 2$). Standardowe sformułowanie uogólnione (bez podziału obszaru Ω) to:
znaleźć $u^* \in H_0^1(\Omega)$, takie że:

$$\tilde{a}(u^*, v) = f(v), \tag{2.26}$$

gdzie:

$$\tilde{a}(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad f(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Sformułowanie uogólnione dla zadania (2.25) przy podziale Ω na dwa podobszary, z 'zakładkami':

znaleźć $u_h^* = (u_1, u_2, u_3) \in V^h$, takie że:

$$\tilde{a}_h(u_h^*, v) = f_h(v), \tag{2.27}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_h(u, v) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \nabla u_i \nabla v_i dx, \\ f_h(v) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} f_i v_i dx, \quad f_i = f|_{\Omega_i}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Miejsca, w których występują istotne różnice zostaną przedstawione po przeprowadzeniu dowodu Lematu 2.5.

Lemat 2.5. *Błąd zgodności dla zadania (2.27) szacuje się przez:*

$$\sup_{0 \neq w \in V^h} \frac{|f_h(w) - \tilde{a}_h(u^*, w)|}{\|w\|_h} \leq C \{h_1 \|u^*\|_{H^2(\Omega_1)} + h_2 \|u^*\|_{H^2(\Omega_2)}\}. \tag{2.29}$$

Dowód. Przyjmując za u^* rozwiązanie uogólnione zadania (2.26) oraz $u^*|_{\Omega_i} = u_i^*$ i = 1, 2, 3, rozpatrzmy wyrażenie:

$$f_h(w) - \tilde{a}_h(u^*, w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} f_i w_i dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \nabla u_i^* \cdot \nabla w_i dx.$$

Po podstawieniu za f , zgodnie z (2.25), $f = -\Delta u^*$ (w sensie L^2) do powyższego wyrażenia otrzymujemy:

$$f_h(w) - \tilde{a}_h(u^*, w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} (-\Delta u_i^*) w_i dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \nabla u_i^* \cdot \nabla w_i dx.$$

Korzystając ze wzoru Green'a: dla $u \in H^2(D), v \in H^1(D)$

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla w dx = - \int_D \Delta u \cdot w dx + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot w ds,$$

gdzie η - jest wektorem normalnym zewnętrznym do obszaru D , przekształcamy wyrażenie wyjściowe do:

$$f_h(w) - \tilde{a}_h(u^*, w) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\partial \Omega_i} \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta_i} \cdot w_i ds.$$

Ponieważ $w = (w_1, w_2, w_3) \in V^h$ znika na $\partial \Omega$:

$$f_h(w) - \tilde{a}_h(u^*, w) = -\frac{1}{2} \int_{\delta_1} \frac{\partial u_1^*}{\partial \eta_1} \cdot w_1 ds - \frac{1}{2} \int_{\delta_2} \frac{\partial u_2^*}{\partial \eta_2} \cdot w_2 ds.$$

Przyjmując $\eta = \eta_1 = -\eta_2$ oraz korzystając z faktu, że $u_i^*|_{\delta_i} = u^*|_{\delta_i}$ dla i = 1, 2, otrzymujemy:

$$f_h(w) - \tilde{a}_h(u^*, w) = \frac{1}{2} \left(\int_{\delta_2} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot w_2 ds - \int_{\delta_1} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot w_1 ds \right). \tag{2.30}$$

Pamiętając, że $w_i|_{\delta_i} = \Pi_i(w_3|_{\delta_i})$ dla $i = 1, 2$ dokonujemy następujących przekształceń:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\delta_2} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot w_2 ds - \int_{\delta_1} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot w_1 ds \right| = \\
 & = \left| \int_{\delta_2} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot w_2 ds - \int_{\gamma} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot w_3 ds - \int_{\delta_1} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot w_1 ds + \int_{\gamma} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot w_3 ds \right| = \\
 & = \left| \int_{\delta_2} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} (w_2 - w_3) ds - \int_{\delta_1} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} (w_1 - w_3) ds \right| = \\
 & = \left| \int_{\delta_2} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} (\Pi_2 w_3 - w_3) ds - \int_{\delta_1} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} (\Pi_1 w_3 - w_3) ds \right| = \\
 & = \left| \int_{\delta_2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_2 \right) (\Pi_2 w_3 - w_3) ds - \int_{\delta_1} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_1 \right) (\Pi_1 w_3 - w_3) ds \right|, \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

gdzie $\psi_1 \in \tilde{W}_{h_1}(\delta_1), \psi_2 \in \tilde{W}_{h_2}(\delta_2)$ (ostatnia równość wynika z definicji projekcji mortarowych). Wyrażenie (2.31) przekształcamy dalej

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_2 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_2))'} \cdot \|\Pi_2 w_3 - w_3\|_{H^{\frac{1}{2}}(\delta_2)} + \\
 & + \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_1 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_1))'} \cdot \|\Pi_1 w_3 - w_3\|_{H^{\frac{1}{2}}(\delta_1)} \leq \\
 & \leq \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_2 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_2))'} \cdot \|\Pi_2 w_3 - w_3\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_2)} + \\
 & + \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_1 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_1))'} \cdot \|\Pi_1 w_3 - w_3\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_1)} \leq \\
 & \leq \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_2 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_2))'} \cdot \left\{ \|\Pi_2 w_3\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_2)} + \|w_3\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_2)} \right\} + \\
 & + \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_1 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_1))'} \cdot \left\{ \|\Pi_1 w_3\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_1)} + \|w_3\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_1)} \right\}. \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

Korzystając z $H_{00}^{\frac{1}{2}}$ - stabilności $\Pi_i w_3$ (Lemat 2.3 - 2.13) przekształcamy (2.32) do postaci

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_2 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_2))'} \cdot \left\{ \|w_2\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_2)} + \|w_3\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_2)} \right\} + \\
 & + \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_1 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_1))'} \cdot \left\{ \|w_1\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_1)} + \|w_3\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_1)} \right\}. \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Ponieważ $\|w_i\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} \leq C\|w_i\|_{H^1(\Omega_i)}$ dla $i = 1, 2$ doprowadzamy (2.33) do postaci:

$$C \cdot \left\{ \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_2 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_2))'} \cdot \{ \|w_2\|_{H^1(\Omega_2)} + \|w_3\|_{H^1(\Omega_2)} \} + \right. \\ \left. + \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_1 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_1))'} \cdot \{ \|w_1\|_{H^1(\Omega_1)} + \|w_3\|_{H^1(\Omega_1)} \} \right\}. \quad (2.34)$$

Wykorzystując własność:

$$\|w_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C\|\nabla w_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq C\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\|\nabla w_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2} = \|w\|_h,$$

(2.34) przybiera postać:

$$C \cdot \left\{ \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_2 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_2))'} + \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_1 \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_1))'} \right\} \cdot \|w\|_h.$$

Otrzymujemy więc nierówność:

$$\left| \int_{\delta_2} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} w_2 ds - \int_{\delta_1} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} w_1 ds \right| \leq \\ \leq C \cdot \|w\|_h \inf_{\psi_1 \in \tilde{W}_{h_1}(\delta_1), \psi_2 \in \tilde{W}_{h_2}(\delta_2)} \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - \psi_i \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_i))'}.$$

Oznaczając przez: Q_i - ortogonalną projekcję z $L^2(\delta_i)$ na $\tilde{W}_{h_i}(\delta_i)$ dla $i=1, 2$, powyższą nierówność przekształcamy do postaci:

$$\left| \int_{\delta_2} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} w_2 ds - \int_{\delta_1} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} w_1 ds \right| \leq C \cdot \|w\|_h \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} - Q_i \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\delta_i))'}. \quad (2.35)$$

Na mocy Lematu 2.2 przekształcamy ostatecznie (2.35) do:

$$\left| \int_{\delta_2} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} w_2 ds - \int_{\delta_1} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} w_1 ds \right| \leq C \cdot \|w\|_h h_3 \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\delta_i)} \leq \\ \leq C\|w\|_h \{h_1\|u^*\|_{H^2(\Omega_1)} + h_2\|u^*\|_{H^2(\Omega_2)}\}.$$

□

Twierdzenie 2.5. *Błąd zgodności dla zadania (2.5) szacuje się przez:*

$$\sup_{0 \neq w \in V^h} \frac{|f_h(w) - a_h(u^*, w)|}{\|w\|_h} \leq C \{h_1\|u^*\|_{H^2(\Omega_1)} + h_2\|u^*\|_{H^2(\Omega_2)}\}. \quad (2.36)$$

Dowód. Pamiętając, że u^* jest rozwiązaniem zadania (1.2) analogicznie do dowodu Lematu 2.5 otrzymujemy zamiast (2.30) wyrażenie:

$$f_h(w) - a_h(u^*, w) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left(\int_{\delta_2} a_{i,j} D_j u^* \cdot \eta_i \cdot w_2 ds - \int_{\delta_1} a_{i,j} D_j u^* \cdot \eta_i \cdot w_1 ds \right), \quad (2.37)$$

gdzie $\eta = [\eta_1, \eta_2]$ jest wektorem normalnym zewnętrznym do Ω_1 . Przekształcając dalej (2.37) otrzymujemy:

$$|f_h(w) - a_h(u^*, w)| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\gamma} a_{i,j} D_j u^* \cdot \eta_i \cdot [w_2 - w_1] ds \right|.$$

Korzystając z założenia $|a_{i,j}| \leq M$ dla $i, j=1, 2$ mamy:

$$|f_h(w) - a_h(u^*, w)| \leq \frac{M}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left| \int_{\gamma} D_j u^* \cdot \eta_i \cdot [w_2 - w_1] ds \right|,$$

co z kolei daje się przekształcić ostatecznie do postaci:

$$|f_h(w) - a_h(u^*, w)| \leq M \cdot C \int_{\gamma} \left| \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot [w_2 - w_1] \right| ds. \quad (2.38)$$

Zauważając (2.35) na mocy Lematu 2.5. □

2.5.3. Błąd zadania dyskretnego

Korzystając z (2.11) oraz Twierdzeń 2.4 i 2.5 otrzymujemy

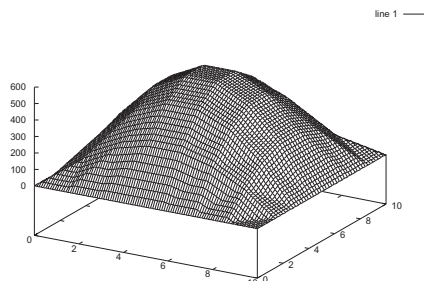
$$\begin{aligned} \|u^* - u_h^*\|_h &\leq 2 \inf_{v \in V^h} \|u^* - v\|_h + \sup_{0 \neq w \in V^h} \frac{|f_h(w) - a_h(u^*, w)|}{\|w\|_h} \leq \\ &\leq C_1 \{ (h_1 + h_3) \|u^*\|_{H^2(\Omega_1)} + (h_2 + h_3) \|u^*\|_{H^2(\Omega_2)} \} + \\ &\quad + C_2 \{ h_1 \|u^*\|_{H^2(\Omega_1)} + h_2 \|u^*\|_{H^2(\Omega_2)} \}. \end{aligned}$$

Zatem:

Twierdzenie 2.6. Niech $u^* \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega_i)$ $i=1, 2$. Wtedy

$$\|u^* - u_h^*\|_h \leq C \{ (h_1 + h_3) \|u^*\|_{H^2(\Omega_1)} + (h_2 + h_3) \|u^*\|_{H^2(\Omega_2)} \},$$

gdzie u^* i u_h^* są odpowiednio rozwiązaniami (1.2) i (2.5), C jest stałą niezależną od h_1, h_2, h_3 .



Rysunek 6 : Rozwiązanie przybliżone-MES.

3. Wyniki eksperymentów

Celem przeprowadzonych eksperymentów było potwierdzenie rezultatów teoretycznych uzyskanych w rozdziale drugim i trzecim. Eksperymenty polegały na przybliżonym rozwiązaniu w przestrzeni z ograniczeniami zagadnienia, które w sformułowaniu klasycznym ma postać:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie $\Omega = [0, 10]^2$ oraz

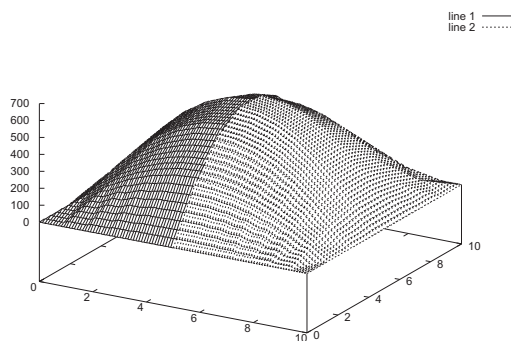
$$f(x, y) = -2y(y - 10) - 2x(x - 10).$$

Rozwiązaniem (3.1) jest funkcja

$$u(x, y) = x(x - 10)y(y - 10). \quad (3.2)$$

W doświadczeniach porównane zostały wyniki uzyskane przy rozwiązaniu (3.1) zwykłą metodą mortarową opisaną na początku rozdziału drugiego oraz metodą mortarową z 'zakładkami' w przestrzeni z ograniczeniami rozważaną w rozdziale drugim. Szczegóły dotyczące implementacji metody mortarowej można odnaleźć np. w [5].

Notacja $(nx_1, ny_1, nx_2, ny_2, nx_3, ny_3)$ oznacza, że na obszarze Ω_i zadana została triangulacja pochodząca od siatki $nx_i \times ny_i$, dla $i=1, 2, 3$. Dla przykładu zapis $(4, 8, 5, 10, 12, 12)$ oznacza, że na podobzdarze Ω_1 mamy triangulację pochodzącą od podziału Ω_1 na cztery części w kierunku OX i na osiem części w kierunku OY. Podobzdar Ω_2 został podzielony na pięć części w kierunku OX i na dziesięć części w kierunku OY, natomiast cały obszar Ω podzielono równomiernie na dwanaście części w kierunku OX i OY. Błędy liczone były dyskretnie - w węzłach siatek. Błąd H^1 to błąd dyskretny odpowiadający seminormie $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$, która jest równoważna normie $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ oraz normie $\|\cdot\|_h$. Uwarunkowanie jak i pozostałe obliczenia wykonane zostały w programie **GNU Octave 2.0.16** (darmowy klon programu **MatLab**). Wszystkie obliczenia wykonywane były w sposób następujący:



Rysunek 7 : Rozwiązanie przybliżone-mortar klasyczny.

- dla znanej wartości rozwiązania w węzłach siatki u_h^* wyznaczana była prawa strona układu dyskretnego (wektor f_h) poprzez przemnożenie macierzy układu A przez wektor rozwiązania u_h^* ;
- dla obliczonego wyżej wektora f_h , metodą sprzężonych gradientów (CG , z kryterium stopu $\|res\|_{l^2} \leq h^2$) wyznaczane było rozwiązanie przybliżone $u_h = (u_h^1, u_h^2, u_h^3)$;
- za rozwiązanie przyjmowane było:
 - we wnętrzu Ω_1 - u_h^1 ,
 - we wnętrzu Ω_2 - u_h^2 ,
 - na γ - u_h^3 .

3.1. Eksperyment pierwszy

Na obszarach $\Omega_1 = [0, 5] \times [0, 10]$, $\Omega_2 = [5, 10] \times [0, 10]$, $\Omega_3 = [0, 10]^2$ zostały zadane triangulacje pokrywające się. W kolejnych wierszach Tabeli 1 przedstawiono wyniki dla zagęszczających się siatek. Tabela 2 zawiera wyniki odpowiedniego eksperymentu z wykorzystaniem klasycznej metody mortarowej.

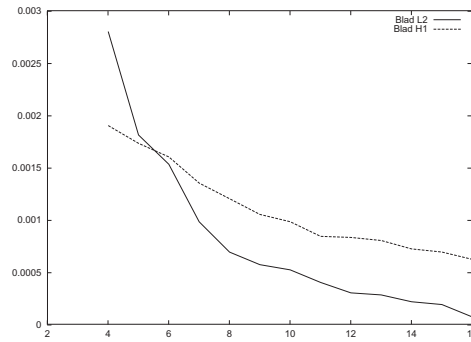
Jak widać metoda opisana w pracy daje takie same wyniki jak metoda mortarowa. Korzyści metody mortarowej z 'zakładkami' wynikają z tego, że jest ona lepiej przystosowana do obliczeń równoległych, co może być dalszym przedmiotem badań.

3.2. Eksperyment drugi

W doświadczeniu drugim na podobszarach Ω_1, Ω_2 zadane zostały triangulacje $nx_1 \times ny_1 = 10 \times 10$, $nx_2 \times ny_2 = 20 \times 20$. Zmianie natomiast ulegała siatka na obszarze Ω_3 . Była ona zagęszczana od $nx_3 \times ny_3 = 4 \times 4$ aż do $nx_3 \times ny_3 = 20 \times 20$.

Tabela 1 : Zestawienie wartości błędów metody mortarowej z zakładkami - triangulacje pokrywające się.

Siatka	Błąd $L^2(\Omega)$	Błąd $H^1(\Omega)$	max	uwarunkowanie
(4, 8, 4, 8, 8, 8)	2.81e-3	1.93e-3	6.51e-3	92.27
(5, 10, 5, 10, 10, 10)	1.82e-3	1.75e-3	1.01e-3	131.51
(6, 12, 6, 12, 12, 12)	1.53e-3	1.64e-3	4.66e-4	175.06
(7, 14, 7, 14, 14, 14)	9.83e-4	1.35e-3	3.65e-4	223.94
(8, 16, 8, 16, 16, 16)	6.96e-4	1.21e-3	3.01e-4	278.31
(9, 18, 9, 18, 18, 18)	5.73e-4	1.05e-3	2.53e-4	338.26
(10, 20, 10, 20, 20, 20)	5.24e-4	9.82e-4	2.39e-4	403.84
(11, 22, 11, 22, 22, 22)	4.01e-4	8.43e-4	2.31e-4	475.84
(12, 24, 12, 24, 24, 24)	3.11e-4	8.30e-4	2.18e-4	552.04
(13, 26, 13, 26, 26, 26)	2.80e-4	8.07e-4	2.05e-4	634.69
(14, 28, 14, 28, 28, 28)	2.15e-4	7.23e-4	1.14e-4	723.69
(15, 30, 15, 30, 30, 30)	1.88e-4	6.92e-4	1.41e-4	817.16

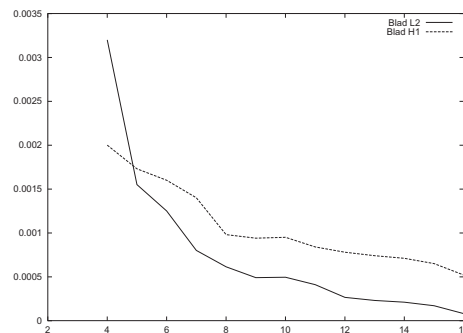


Rysunek 8 : Zestawienie błędów dla 'zakładki'.

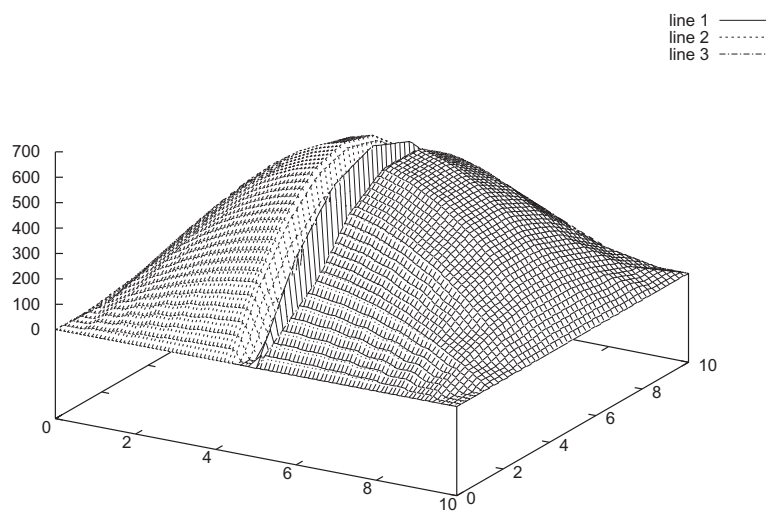
Tabela 2 : Zestawienie wartości błędów dla klasycznej metody mortarowej.

Siatka	Błąd $L^2(\Omega)$	Błąd $H^1(\Omega)$	max	uwarunkowanie
(4, 8, 4, 8)	3.23e-3	2.04e-3	4.51e-3	93.01
(5, 10, 5, 10)	1.59e-3	1.71e-3	1.9e-3	103.46
(6, 12, 6, 12)	1.25e-3	1.61e-3	4.15e-4	111.40
(7, 14, 7, 14)	8.03e-4	1.46e-3	4.11e-4	112.02
(8, 16, 8, 16)	6.13e-4	9.81e-4	3.72e-4	137.94
(9, 18, 9, 18)	4.90e-4	9.46e-4	3.21e-4	171.33
(10, 20, 10, 20)	4.95e-4	9.5e-4	3.07e-4	212.36
(11, 22, 11, 22)	4.17e-4	8.42e-4	2.81e-4	253.39
(12, 24, 12, 24)	2.65e-4	7.80e-4	2.58e-4	302.19
(13, 26, 13, 26)	2.39e-4	7.42e-4	2.21e-4	350.91
(14, 28, 14, 28)	2.11e-4	7.12e-4	1.82e-4	407.48
(15, 30, 15, 30)	1.72e-4	6.50e-4	1.73e-4	463.93

Algorytm równoległego rozwiązywania zagadnień...



Rysunek 9 : Zestawienie błędów dla mortaru klasycznego.



Rysunek 10 : Rozwiązanie przybliżone - metoda mortarowa z zakładkami.

Wartości błędów zwykłej metody mortarowej dla siatek $nx_1 \times ny_1 = 10 \times 10$ oraz $nx_2 \times ny_2 = 20 \times 20$ zawarte zostały w Tabeli 3.

Tabela 3 : Wartości błędów klasycznej metody mortarowej dla ustalonej triangulacji 10x10 - 20x20.

Błąd $L^2(\Omega)$	Błąd $H^1(\Omega)$	max	uwarunkowanie
7.5e-4	1.5e-3	7.43e-4	455.06

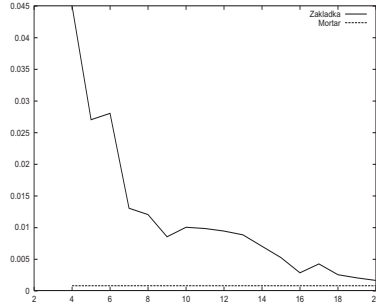
W przestrzeni z ograniczeniami, dla zagęszczających się triangulacji na Ω_3 otrzymano następujące wyniki - Tabela 4:

Tabela 4 : Zestawienie wartości błędów metody mortarowej z zakładkami dla zagęszczającej się triangulacji obszaru Ω_3 .

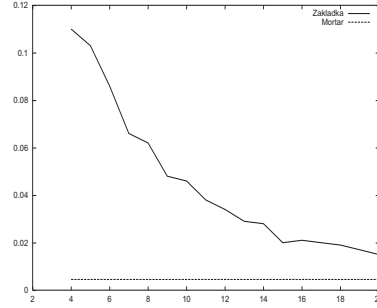
Siatka na Ω_3	Błąd $L^2(\Omega)$	Błąd $H^1(\Omega)$	max	uwarunkowanie
(4, 4)	4.5e-2	1.1e-1	1.7e-2	861.99
(6, 6)	2.8e-2	8.6e-2	7.1e-3	677.44
(8, 8)	1.2e-2	6.2e-2	3.01e-3	603.49
(10, 10)	1.0e-2	4.6e-2	3.2e-3	619.71
(12, 12)	9.4e-3	3.4e-2	2.65e-3	586.59
(14, 14)	7.0e-3	2.8e-2	2.13e-3	582.27
(16, 16)	2.8e-3	2.1e-2	2.01e-3	573.03
(18, 18)	2.5e-3	1.9e-2	1.97e-3	562.08
(20, 20)	1.6e-3	1.8e-2	1.90e-3	556.70

Zapis (x, y) oznacza, że na obszarze Ω_3 zadana została triangulacja od siatki x - w kierunku OX i y - w kierunku OY.

Analiza powyższych danych pozwala zauważyć, że na dokładność rozwiązania przybliżonego wyraźny wpływ ma gęstość siatki na Ω_3 . Już przy zagęszczeniu siatki 14×14 osiągnięte jest stosunkowo dobre przybliżenie wyników otrzymanych metodą mortarową (niecały rząd wielkości). Rozwiązanie przybliżone istotnie zależy od dokładności rozwiązania uzyskanego na Ω_3 aż do momentu zrównoważenia się gęstości siatek na Ω_3 i $\Omega_1 \cup \Omega_2$.



Rysunek 11 : Porównanie błędów L^2

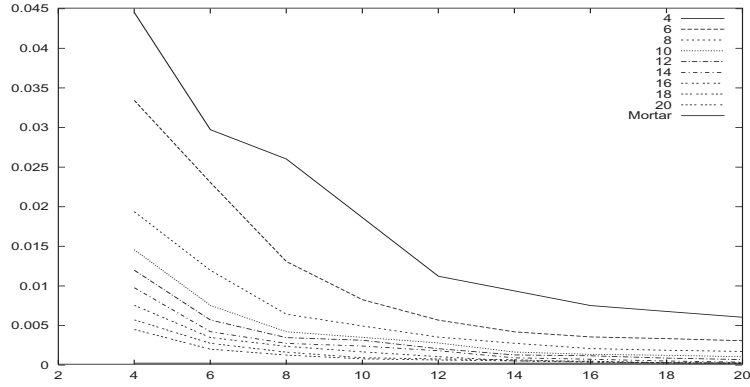


Rysunek 12 : Porównanie błędów H^1

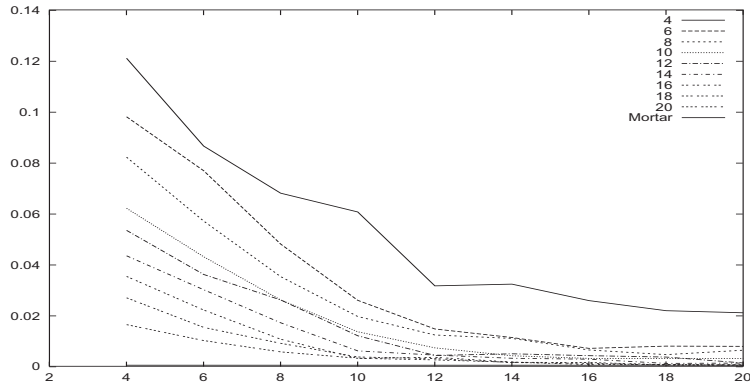
3.3. Eksperyment trzeci

Eksperyment ten polegał na wykonaniu następującej serii doświadczeń: przy stałej gęstości siatki w kierunku OX na Ω_3 zagęszczana była siatka w kierunku OY na tym obszarze. Na podobszarach Ω_1, Ω_2 zadane były triangulacje pochodzące odpowiednio od siatek $10 \times 10, 20 \times 20$. Dla każdej z ustalonych wartości $n \times 3$, które

wynosiły kolejno: 4, 6, ..., 20, zmieniano ny_3 od 4 do 20. Rezultaty zilustrowane zostały na rysunkach 13 i 14.



Rysunek 13 : Zestawienie błędów - L^2 .



Rysunek 14 : Zestawienie błędów - H^1 .

Wynikiem tego eksperymentu jest następujący wniosek: znaczne polepszenie rozwiązania przybliżonego następuje do momentu, w którym $ny_3 \leq ny_1 \equiv 10$. Dobre przybliżenie wyników otrzymanych metodą mortarową (rzęd wielkości) otrzymywane jest już dla siatki na Ω_3 mającej gęstość $nx_3 = \frac{1}{2}(nx_1 + nx_2)$ oraz $ny_3 = \frac{1}{2}(ny_1 + ny_2)$.

4 4. Podsumowanie

Na mocy Twierdzenia 2.6 oszacowanie błędu metody wyraża się zależnością:

$$\|u^* - u_h^*\|_h \leq C \cdot \sum_{i=1}^2 (h_i + h_3) \|u^*\|_{H^2(\Omega_i)}.$$

Dla porównania zwykła metoda mortarowa przy podziale całego obszaru Ω na dwie części Ω_1, Ω_2 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, daje oszacowanie błędu [1]:

$$\|u^* - u_h^*\|_h \leq C \cdot \sum_{i=1}^2 h_i \|u^*\|_{H^2(\Omega_i)},$$

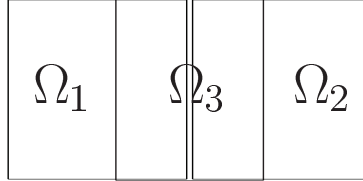
a standardowa metoda elementu skończonego na triangulacjach zgodnych na Ω_3 z parametrem h_3 daje oszacowanie [4]:

$$\|u^* - u_h^*\|_h \leq C \cdot h_3 \|u^*\|_{H^2(\Omega)}.$$

Tak więc utrzymany został rząd zbieżności.

Metoda przybliżonego rozwiązywania zagadnień eliptycznych przedstawiona w tej pracy, daje takie same wyniki jak, dobrze znane metody: elementu skończonego i mortarowa. Oszacowanie błędu dla wszystkich wymienionych podejść ma ten sam rząd wielkości. Przedstawione wyniki eksperymentów numerycznych potwierdzają teorię. Wprowadzając dodatkową triangulację na Ω_3 - 'zakładkę', możemy dla siatki równoodległej, na części zadania dyskretnego na Ω_3 , zastosować algorytm FFT (patrz np. [6]). Możemy więc szybkim algorytmem otrzymać pierwsze przybliżenie rozwiązania, a następnie dokładnie rozwiązywać na podobszarach Ω_1, Ω_2 , na których nie można stosować FFT, ze względu na regularność siatek. Zwiększeniu ulega natomiast wymiar zadania oraz pogarsza się uwarunkowanie (względem standardowej metody mortarowej).

Metoda opisana w pracy stwarza także możliwość dalszych uogólnień. Jednym z nich może być taki podział całego obszaru Ω , aby części nakładające się $\Omega \cap \Omega_i$ stanowiły tylko 'pasek', a nie tak jak to zostało przedstawione cały obszar Ω_i (Rysunek 15). W tym przypadku



Rysunek 15 : Podział obszaru Ω .

dodatkowo trzeba by założyć, że

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\partial \Omega_3 \setminus (\partial \Omega_1 \cup \partial \Omega_2)} = 0.$$

Naturalnym byłoby następnie zawężanie szerokości paska, aż do γ .

W przestrzeni z ograniczeniami możliwe jest kolejne uogólnienie. Okazuje się, że przy znajomości rozwiązania na γ , następuje naturalne urownoleglenie zadania. Można by próbować szukać najpierw rozwiązania tylko na γ , a następnie rozwiązywać równoległe dwa zadania na podobszarach Ω_1, Ω_2 . Oczywiście każdy z podobszarów można znowu podzielić na kolejne podobszary i uzyskać jeszcze większy stopień równoległości.

Bibliografia

- [1] Bernardi C., Maday Y., A.T.Patera A. T., (1994); *A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numerique-Universite Pierre Et Marie Curie, Centre National de la Recherche Scientifique.
- [2] Braess D., (1997); *Finite elements. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Cai X. C., Dryja M., Sarkis M., (1999); *Overlapping nonmatching grid mortar element methods for elliptic problems*, Siam. J. Numer. Anal., Volume 36, nr 2, 581–606.
- [4] Ciarlet P., (1978); *The finite elements methods for elliptic problems*, North-Holland Publishing Company Amsterdam-New York-Oxford, 1st edition.
- [5] Dryja M., Proskurowski W., (2003); *On Preconditioners for Mortar Discretization of Elliptic Problems*, Numerical Linear Algebra and Application, nr 10, 65–82.
- [6] Jankowski J. i M., Dryja M., (1998); *Przegląd metod i algorytmów numerycznych cz.1, 2*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [7] Marcinkowska H. (1993); *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, wydanie pierwsze.
- [8] Stefanica D. (1999); *Domain Decomposition Methods for Mortar Finite Elements*, Courant Institute of Mathematical Sciences New York University.
- [9] Wohlmuth B. I. (2001); *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*, Lecture Notes in Computational, Science and Engineering, vol 17, Springer-Verlag, Berlin.