INFORMATYKA I MATEMATYKA

Michał Bernardelli

UŻYCIE MICROSOFT EXCEL DO ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ OPTYMALIZUJĄCYCH

[**słowa kluczowe:** arkusz kalkulacyjny, Microsoft Excel, Solver, optymalizacja, symulacja komputerowa, zadania z ograniczeniami, zastosowania komputerów]

Streszczenie

Microsoft Excel jest w tych czasach najczęściej używanym arkuszem kalkulacyjnym w Polsce. Stosunkowo niewielka jednak część jego użytkowników wykorzystuje w pełni oferowane przez program możliwości. Ale nawet oni nie zdają sobie sprawy z faktu, jak potężnym narzędziem jest produkt firmy Microsoft. Opisane w artykule (nieco zabawne) zadanie obrabowania banku, stanowi pretekst do prezentacji Solvera – zaawansowanego narzędzia optymalizacyjnego, będącego integralną częścią arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel. Rozwiązanie zadania pakowania sztabek złota i srebra przedstawione jest krok po kroku tak, aby czytelnik mógł opanować podstawowe funkcje udostępniane przez Solver, a w przyszłości używać tego narzędzia do rozwiązywania wielu rzeczywistych problemów optymalizacyjnych.

* * *

1. Przegląd arkuszy kalkulacyjnych

Arkusze kalkulacyjne są, zaraz po edytorach tekstu, drugą pod względem popularności kategorią programów używanych na komputerach osobistych. Większość osób przez arkusz kalkulacyjny rozumie automatycznie stworzone tabelki, na których można wykonywać proste operacje arytmetyczne, jak sumowanie czy wyliczanie średnich. To jednak potrafią i edytory tekstu takie jak Microsoft Word (zob. *http://pl.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Word*) czy OpenOffice.org Writer (zob. *http://pl.wikipedia.org/wiki/OpenOffice.org_Writer*). Arkusze kalkulacyjne pozwalają jednak na automatyczną obróbkę danych oraz ich, na ogół graficzną, prezentację. Do obróbki danych wykorzystywanych jest szereg funkcji: matematycznych, finansowych, statystycznych, bazodanowych i innych. Zaawansowane arkusze kalkulacyjne udostępniają również tworzenie makropoleceń, a nawet całe języki programowania, które pozwalają bardziej wydajnie i efektywnie generować, modyfikować i przetwarzać dane.

Do najbardziej rozbudowanych i jednocześnie najbardziej znanych arkuszy kalkulacyjnych w środowisku Windows (porównaj *http://pl.wikipedia.org/wiki/Arkusz_kalkulacyjny)* można zaliczyć arkusze, będące elementami składowymi całych pakietów biurowych, a mianowicie **OpenOffice.org Calc** z dostępnego nieodpłatnie pakietu biurowego OpenOffice.org (patrz. *http://pl.wikipedia.org/wiki/OpenOffice.org_Calc*), **Quattro Pro** sprzedawanego w ramach pakietu WordPerfect Office (zob. *http://pl.wikipedia.org/wiki/Quattro_Pro*), a przede wszystkim **Microsoft Excel** z pakietu Microsoft Office (zob. *http://pl.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Excel*). Pierwsza wersja programu Microsoft Excel pod system operacyjny Windows trafiła na rynek już w 1987 roku i od razu spotkała się z wielkim uznaniem użytkowników. Prestiżowy PC Magazine w 1988 roku napisał: „*Excel jest pierwszą liczącą się aplikacją pod Windows.*". Więcej na temat historii arkuszy kalkulacyjnych można dowiedzieć się ze strony *http://www.winter.pl/internet/arkusze.html* oraz z artykułu „25 lat za kratkami", który ukazał się w numerze 10/2004 polskiej edycji magazynu Chip[1].

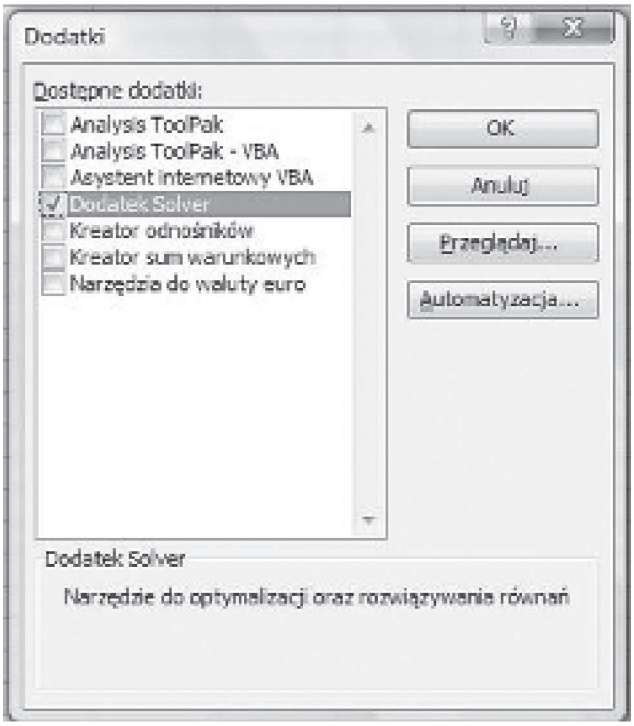
2. Instalacja Solvera

Zdecydowanie najpopularniejszy wśród polskich użytkowników arkusz kalkulacyjny Microsoft Excel daje możliwości, które są rzadko wykorzystywane. Podstawowym tego powodem nie jest jednak ich skomplikowana obsługa, mała przydatność czy trudności w nauczeniu się ich posługiwaniem, lecz na ogół zwykła nieświadomość ich istnienia. Jednym z takich niezwykle przydatnych, zaawansowanych, choć dość prostych w obsłudze narzędzi jest **Solver**. Służy on do rozwiązywania równań oraz zadań optymalizacyjnych, to jest do znalezienia takiej wartości, która jest optymalna przy podanych ograniczeniach. Przykładowe zastosowania to między innymi maksymalizacja zysku, minimalizacja strat

[1] Artykuł udostępniony został na stronie *http://www.aresluna.org/attached/computerhistory/articles/25latzakratkami*

czy wyznaczenie optymalnej trasy. Solver, jest dodatkiem do Microsoft Excel, który domyślnie nie jest włączony. Poniżej przedstawiono jak zmienić te ustawienia. Ponieważ, mimo wprowadzenia wersji Microsoft Office 2007, nadal najczęściej używaną wersją pakietu biurowego firmy Microsoft jest wersja z roku 2003, więc na rysunkach zaprezentowanych w tym artykule przedstawiona jest właśnie ona.

Aby zainstalować dodatek Solver należy wybrać z menu głównego *Narzędzia*, a następnie *Dodatki*. Pojawi się wówczas okno, w którym wystarczy zaznaczyć pole *Dodatek Solver* i wcisnąć przycisk *OK* (patrz rys. 1). Od tego momentu Solver dostępny będzie w menu głównym w zakładce *Narzędzia*→*Solver*.



Rys. 1. Instalacja dodatku Solver w Microsoft Excel 2003

W celu zainstalowania Solvera w wersji Microsoft Excel 2007 należy kliknąć na przycisk Microsoft Office, a następnie kliknąć przycisk *Opcje programu Excel*. Po wybraniu pozycji *Dodatki* należy w polu *Zarządzaj* wybrać *Dodatki programu Excel*, kliknąć przycisk *Przejdź* i zaznaczyć Solver. Po załadowaniu dodatku Solver będzie dostępny w grupie *Analiza* na karcie *Dane*.

3. Zadanie optymalizacyjne

Przejdźmy zatem do przedstawienia przykładu użycia narzędzia Solver do rozwiązania zadania optymalizacyjnego[2]. Wyobraźmy sobie, że pewna grupa przestępców zdecydowała się obrabować skarbiec jednego z banków. Wiadomo, że znajdują się w nim 100 sztabek złota i 250 sztabek srebra. W przykładzie na rys. 2 podane zostały dodatkowo waga jednej sztabki oraz jej wartość rynkowa. Do wyniesienia sztabek ze skarbca rabusie postanowili użyć skrzynek, których maksymalna ładowność to 35 kilogramów[3]. Trzeba zawczasu zaplanować ile skrzynek będzie potrzebnych do zapakowania i wyniesienia wszystkich sztabek. Kluczową kwestią każdego napadu jest czas, a co za tym idzie liczba skrzynek powinna być jak najmniejsza. Jest to przykład zadania optymalizacyjnego, do którego rozwiązania można użyć Solvera.

DANE LICZBOWE DOTYCZĄCE RABUNKU			
	waga [kg]	liczba [szt]	wartość [jed]
sztabka złota	11	100	1000
sztabka srebra	6	250	450
skrzynka	35	40	—

Rys. 2. Dane dotyczące napadu na bank

W nowym arkuszu wpisujemy, jak na rys. 2, dane liczbowe dotyczące napadu. Następnie musimy wypisać wszystkie, akceptowalne z punktu widzenia ładowności, sposoby zapełnienia skrzynki sztabkami. Po chwili zastanowienia zauważamy, że są tylko cztery takie sposoby. Liczby sztabek złota i srebra, które można zapakować do jednej skrzynki oraz waga takiej skrzynki umieszczone są w przykładzie z rys. 3.

[2] Przykłady zastosowań są również dostępne w pomocy programu Microsoft Excel.
[3] W zadaniu tym pomijamy objętości sztabek i skrzynek.

MOŻLIWE SPOSOBY PAKOWANIA SKRZYNKI			
nr sposobu	sztabki złota	sztabki srebra	waga [kg]
1	0	5	30
2	1	4	35
3	2	2	34
4	3	0	33

Rys. 3. Możliwe sposoby zapakowania sztabek do skrzyni

Możemy przejść teraz do zdefiniowania ograniczeń oraz funkcji opisującej rozwiązanie naszego zadania. Oznaczmy przez n_i dla i=1, 2, 3, 4, liczbę skrzynek zapakowanych i-tym sposobem. Wówczas zadanie sprowadza się do znalezienia minimum funkcji:

$$f(n_1, n_2, n_3, n_4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4.$$

Zmiennym n_i odpowiadają komórki od 12 do 15 z kolumny D na rys. 4, zaś wartość funkcji f umieszczona jest w komórce D16 opisanej formułą = *SUMA-(D12:D15)*. Pozostałe kolumny odpowiadają sumarycznym liczbom sztabek złota (kolumna E) i srebra (kolumna F) w zależności od liczby zapakowanych skrzynek. Przykładowo zawartość komórki F12 dana jest formułą *=5*D12*, gdzie liczba 5 jest liczbą sztabek srebra zapakowanych sposobem numer 1, zaś w komórce D12 zapisana jest liczba skrzynek zapakowanych tym sposobem. Początkowa wartość komórki D12 to jeden[4], stąd komórka F12 będzie miała wartość 5. Warto dodać, że formuła ta byłaby bardziej uniwersalna gdyby zamiast liczby 5 użyć adresu komórki z rys. 3, w której liczba 5 się znajduje. W komórkach E16 i F16 znajdują się sumy wszystkich zapakowanych sztabek, odpowiednio złota i srebra.

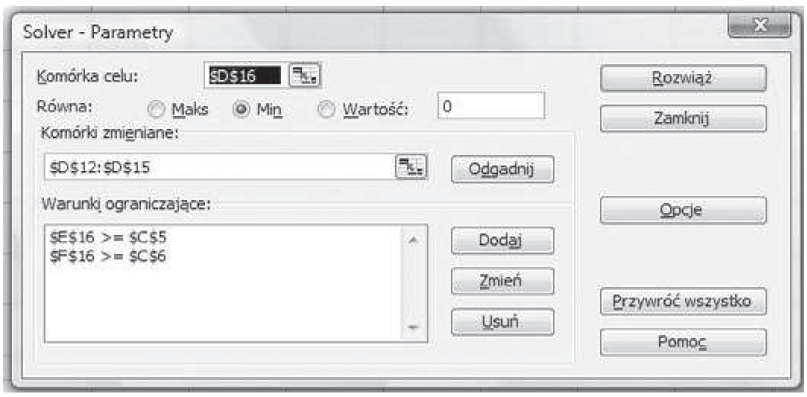
[4] W miejsce jedynki można wstawić praktycznie dowolną inną liczbę. Nie ma to znaczenia dla użytkownika, chociaż ma znaczenie dla działania narzędzia Solver (porównaj założenia twierdzenia o zbieżności metody iteracyjnej Newtona, np. [1]).

	C	D	E	F
10	ROZWIĄZANIE			
11	nr sposobu	liczba skrzynek	sztabki złota	sztabki srebra
12	1	1	0	5
13	2	1	1	4
14	3	1	2	2
15	4	1	3	0
16		4	6	11

Rys. 4. Wygląd danych przed użyciem Solvera

Jesteśmy gotowi do użycia Solvera. Zaznaczając komórkę D16 uruchamiamy go wybierając z menu *Narzędzia*→*Solver*. Widok głównego okna narzędzia Solver pokazany jest na rys. 5. Należy w nim wprowadzić następujące dane:

- zaznaczoną komórkę *D16* jako *Komórka celu* (najprawdopodobniej pole to będzie ustawione automatycznie),
- wartość *Min* jako pole *Równa* (szukamy bowiem minimum funkcji f),
- komórki od *D12* do *D15* jako *Komórki zmieniane* (oznaczają szukane rozwiązanie).



Rys. 5. Solver z wypełnionymi podstawowymi polami

Dodatkowo należy podać *Warunki ograniczające*. Są to warunki, które musi spełniać szukane rozwiązanie. W przypadku zadania napadu na bank są to z pewnością wymagania, by zapakowane zostały wszystkie sztabki złota:

E16 >= 100

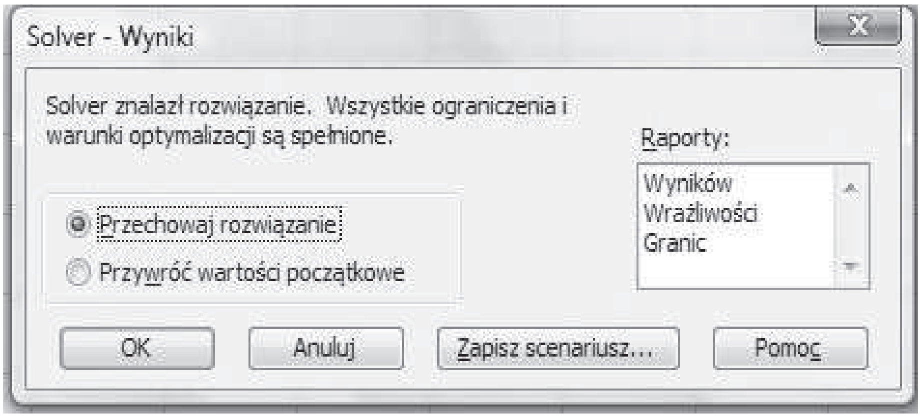
i srebra:

F16 >= 250.

Lepszym, bo bardziej uniwersalnym podejściem, jest sformułowanie tych warunków jako:

E16 >= C5 i *F16 >= C6*,

gdzie *C5* i *C6* są adresami komórek, które zawierają liczby sztabek w skarbcu. Warto jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że w podanych wyżej warunkach nie występują znaki równości lecz nierówności nieostre. Wytłumaczenie tego jest następująca: może się bowiem zdarzyć, że do skrzynek zapakowane zostaną wszystkie sztabki, poza na przykład jedną sztabką złota. Wówczas musimy wziąć dodatkową skrzynkę, do której zapakujemy tę ostatnią sztabkę. Z zestawienia na rys. 4 będzie jednak wynikać, iż do takiej liczby skrzynek można zapakować więcej sztabek mimo, że w skarbcu ich nie było. Przykładowo zmieszczą się jeszcze dwie sztabki złota. Stąd konieczne jest sformułowanie warunków z użyciem nierówności >=, oznaczających tylko tyle, że musimy zapakować **co najmniej** (czyli w szczególności wszystkie) 100 sztabek złota i 250 sztabek srebra. Po wprowadzeniu tych warunków i wciśnięciu przycisku *Rozwiąż*, pojawi się okienko (patrz rys. 6) z informacją o wynikach.



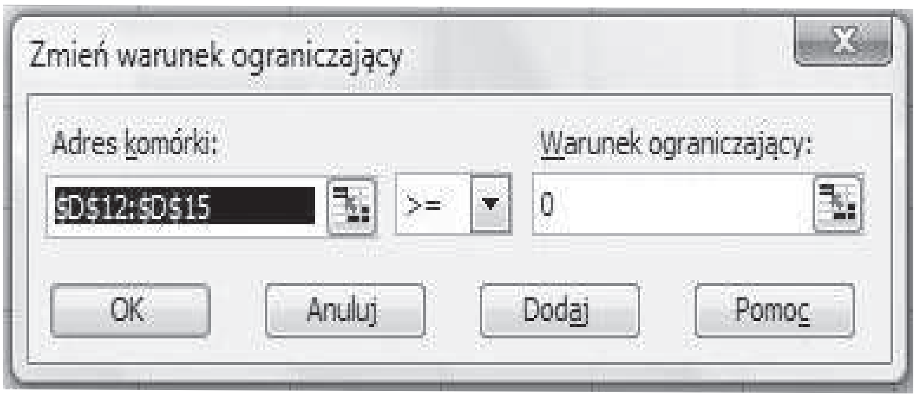
Rys. 6. Okno Solvera z wynikami

Przykładowy wynik działania Solvera dla tak podanych warunków ograniczających można zobaczyć na rys. 7. Widać, że rozwiązanie to nie ma sensu, dlatego zaznaczamy w okienku *Solver – Wyniki* (rys. 6) opcję *Przywróć wartości początkowe* i naciskamy przycisk *OK*. W ten sposób wrócimy do danych z rys. 4.

ROZWIĄZANIE			
nr sposobu	liczba skrzynek	sztabki złota	sztabki srebra
1	-1267725240,52	0,00	-6338626202,61
2	1267725287,88	1267725287,88	5070901151,53
3	633862650,54	1267725301,08	1267725301,08
4	-845150162,99	-2535450488,96	0,00
	-211287465,09	100,00	250,00

Rys. 7. Rozwiązanie znalezione przez Solver
przy dwóch warunkach ograniczających

Zastanówmy się przez chwilę czemu znalezione przez Solver rozwiązanie nie spełniało naszych oczekiwań. Na pierwszy rzut oka widać, że w rozwiązaniu (patrz kolumna z liczbą skrzynek z rys. 7) pojawiają się liczby ujemne. Liczba skrzynek nie może być przecież mniejsza od zera! Musimy zatem dodać następny warunek ograniczający: wszystkie liczby w kolumnie *D* i wierszach od *12* do *15* muszą być większe lub równe zeru. Zamiast czterech osobnych warunków ograniczających można to wymaganie sformułować w postaci jednego warunku, jak na rys. 8.



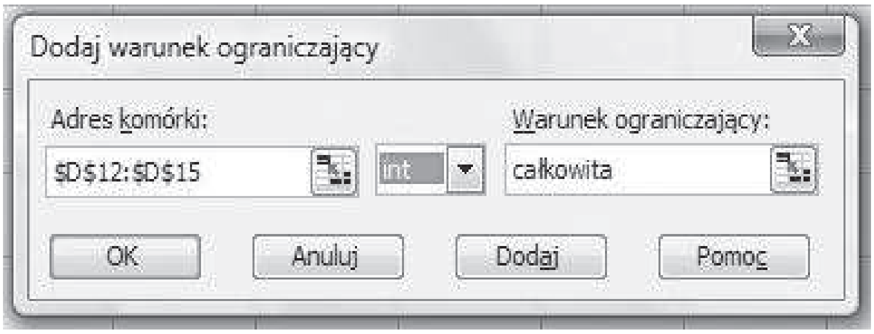
Rys. 8. Okno Solvera do wprowadzania warunków ograniczających

Przy tak określonych warunkach ograniczających, pełni nadziei wciskamy przycisk *Rozwiąż* i niestety rozwiązanie (patrz rys. 9) nadal nie pasuje do naszych wyobrażeń.

ROZWIĄZANIE			
nr sposobu	liczba skrzynek	sztabki złota	sztabki srebra
1	0	0	0
2	50,05	50,05	200,2
3	24,9	49,8	49,8
4	0,05	0,15	0
	75	100	250

Rys. 9. Rozwiązanie znalezione przez Solver przy trzech warunkach ograniczających

Zapomnieliśmy bowiem o jeszcze jednym warunku: liczby skrzynek muszą być liczbami całkowitymi – ułamki są niedopuszczalne. Na szczęście Solver oferuje możliwość wprowadzenia takiego wymagania. W oknie *Dodaj warunek ograniczający* wystarczy wybrać opcję *int*[5] (patrz rys. 10). Wciśnięcie w tym momencie przycisku *OK.* wygeneruje błąd[6]. Wina leży po stronie programistów firmy Microsoft, ale łatwo tą ewidentną usterkę obejść, a mianowicie w polu *Warunek ograniczający* należy wstawić adres jakiejś komórki bądź dowolną liczbę, na przykład zero.

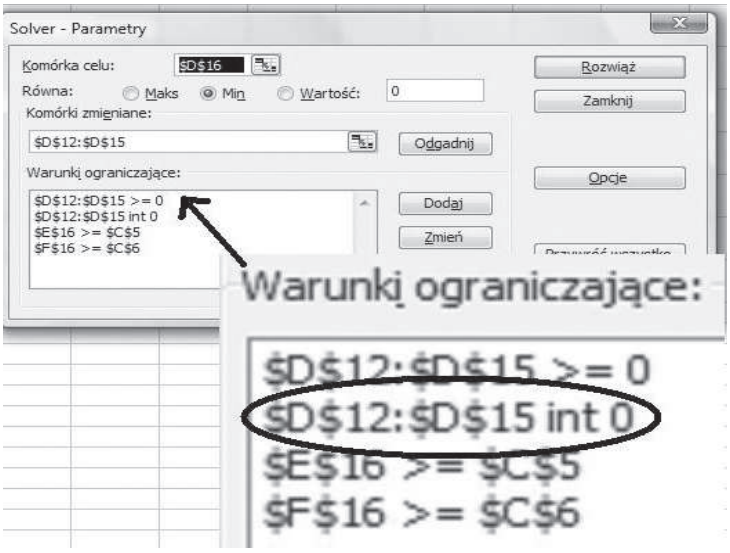


Rys. 10. Wprowadzanie warunku ograniczającego rozwiązanie do liczb całkowitych.

[5] Od angielskiego *integer* oznaczającego liczbę całkowitą.

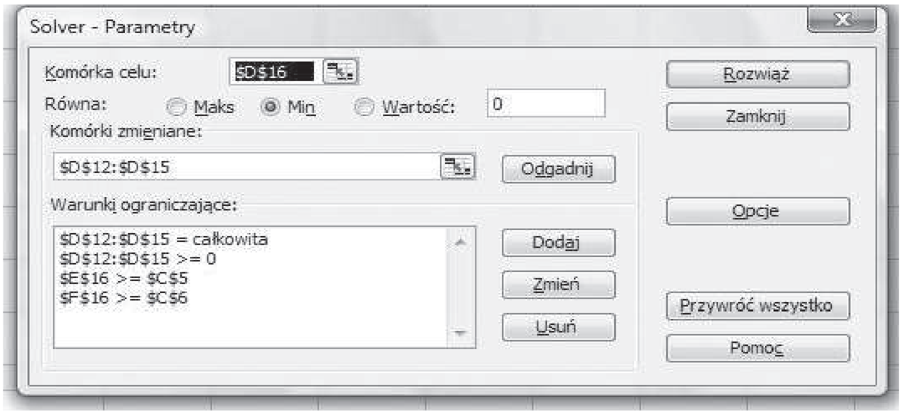
[6] W wersji Microsoft Excel 2007 błąd ten został poprawiony.

Wciśnięcie w tym momencie przycisku *OK* zakończy się powodzeniem, a widok okna Solvera z podanymi czterema warunkami ograniczającymi przedstawiony jest na rys. 11.



Rys. 11. Sposób na ominięcie błędu w programie Microsoft Excel 2003

Po zamknięciu okna Solvera i ponownym uruchomieniu, warunki będą już odczytane poprawnie (patrz rys. 12).



Rys. 12. Okno Solvera po wprowadzeniu wszystkich warunków ograniczających

Przy tak sformułowanych warunkach ograniczających Solver wygeneruje rozwiązanie, które odpowiadać będzie faktycznemu rozwiązaniu problemu. Przedstawione zostało ono na rys. 13, z którego można odczytać, że rabusie powinni zaopatrzyć się w 75 skrzynek i zapakować 50 z nich sposobem oznaczanym numerem 2, zaś pozostałe 25 trzecim sposobem.

ROZWIĄZANIE			
nr sposobu	liczba skrzynek	sztabki złota	sztabki srebra
1	0	0	0
2	50	50	200
3	25	50	50
4	0	0	0
	75	100	250

Rys. 13. Rozwiązanie zadania minimalizacji liczby skrzynek niezbędnych przy napadzie na bank

Zapakowanie i wyniesienie 75 skrzynek może okazać się zbyt czasochłonne. Złodziejom starczy czasu na kradzież tylko 40 pełnych skrzynek (patrz rys. 2 z danymi zadania). Jak mają zapakować te skrzynki, aby ich zysk był jak największy? Jest to kolejne zadanie optymalizacyjne, tym razem polega na maksymalizacji funkcji:

$$g(n_1, n_2, n_3, n_4) = n_1 * w_1 + n_2 * w_2 + n_3 * w_3 + n_4 * w_4,$$

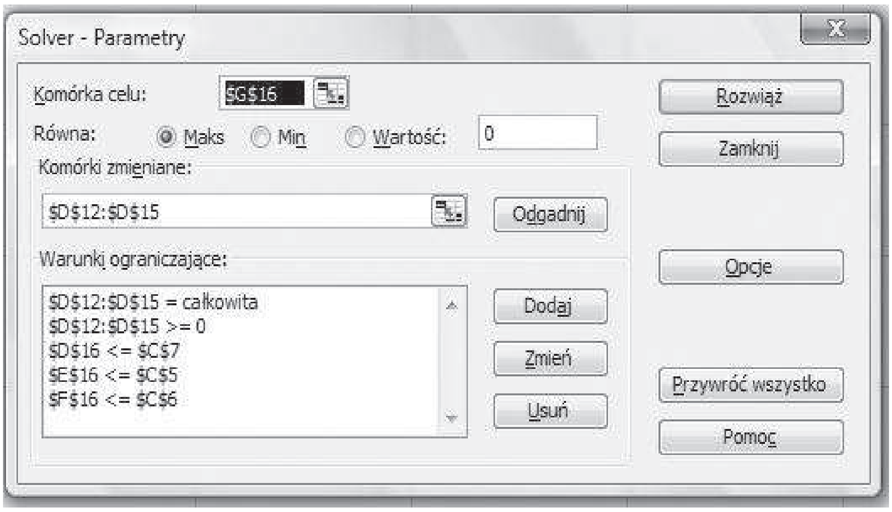
gdzie zmienne n_i oznaczają liczby skrzynek zapakowanych i-tym sposobem, zaś w_i określają wartość zapakowanej i-tym sposobem skrzynki (na podstawie danych z rys. 2). Tabelę z danymi wejściowymi dla Solvera rozbudowujemy o jedną kolumnę z wartościami skrzynek, jak na rys. 14.

	C	D	E	F	G
10	ROZWIĄZANIE				
11	nr sposobu	liczba skrzynek	sztabki złota	sztabki srebra	wartość skrzynek
12	1	1	0	5	2250
13	2	1	1	4	2800
14	3	1	2	2	2900
15	4	1	3	0	3000
16		4	6	11	10950

Rys. 14. Wygląd danych przed użyciem Solvera

Zaznaczając komórkę G16 uruchamiamy Solver i wprowadzamy następujące dane (patrz rys. 15):

- zaznaczoną komórkę *G16* jako *Komórka celu*,
- wartość *Max* jako pole *Równa* (szukane maksimum funkcji g),
- komórki od *D12* do *D15* jako *Komórki zmieniane*,
- W polu *Warunki ograniczające* dodajemy wymagania:
  - szukane rozwiązanie ma być całkowitoliczbowe,
  - wartości w komórkach *D12:D15* będących wynikiem działania Solvera mają być większe lub równe zero,
  - liczba skrzynek (komórka *D16*) ma być równa lub mniejsza od 40,
  - liczba sztabek złota (komórka *E16*) ma być nie większa niż 100,
  - liczba sztabek srebra (komórka *F16*) ma być mniejsza lub równa 250.



Rys. 15. Okno Solvera po wprowadzeniu wszystkich warunków ograniczających z uwzględnieniem wykorzystania tylko 40 skrzynek

Po wprowadzeniu wszystkich danych wciskamy przycisk *Rozwiąż* i uzyskujemy rozwiązanie jak na rys. 16. Odczytujemy z niego, iż aby zysk był maksymalny należy 29 spośród 40 skrzynek zapakować sposobem oznaczonym numerem 4, dziewięć skrzynek zapakować sposobem drugim, zaś pozostałe dwie skrzynki sposobem numer 3. W ten sposób wartość skrzynek będzie największa i równa 118 tysięcy.

ROZWIĄZANIE				
nr sposobu	liczba skrzynek	sztabki złota	sztabki srebra	wartość skrzynek
1	0	0	0	0
2	9	9	36	25 200
3	2	4	4	5 800
4	29	87	0	87 000
	40	100	40	118 000

Rys. 16. Rozwiązanie zadania maksymalizacji zysku z zapakowanych sztabkami złota i srebra w 40 skrzynkach

Podsumowanie

Za Solverem kryją się algorytmy i związane z nimi modele i twierdzenia matematyczne. Warto zatem podkreślić, iż działanie Solvera opiera się między innymi na pewnych modyfikacjach metody Newtona (patrz [1]), tak zwanej Generalized Reduced Gradient (GRG2). Metody te działają tylko przy spełnionych odpowiednich warunkach, a znalezienie (bądź nie!) rozwiązania zależy przede wszystkim od podanych warunków początkowych. Dla konkretnych danych początkowych Solver znajduje tylko jedno rozwiązanie. Do znalezienia wszystkich rozwiązań danego problemu należałoby użyć innych algorytmów, których czas działania jednak jest znacznie dłuższy. Przykładowo dla problemu maksymalizacji zysku dla warunków podanych na rysunku 14 dostajemy rozwiązanie z rysunku 16. Wystarczy jednak zmienić początkowe liczby skrzynek aby otrzymać inne rozwiązania tego samego problemu (patrz rys. 17).

Każde rozwiązanie zatem powinno podlegać rzetelnej weryfikacji, by w razie potrzeby dostosować parametry algorytmu do konkretnego zadania. Solver daje takie możliwości. Aby się o tym przekonać wystarczy wcisnąć przycisk *Opcje* w głównym oknie Solvera (zob. rys. 5), bądź obejrzeć generowane przez program raporty (patrz rys. 6).

	ROZWIĄZANIE 1		ROZWIĄZANIE 2		ROZWIĄZANIE 3	
nr sposobu	początkowe liczby skrzynek	końcowe liczby skrzynek	początkowe liczby skrzynek	końcowe liczby skrzynek	początkowe liczby skrzynek	końcowe liczby skrzynek
1	1	0	1	0	1	0
2	1	9	2	2	1	10
3	1	2	1	16	1	0
4	1	29	2	22	3	30

Rys. 17. Przykładowe rozwiązania zadania maksymalizacji zysku z zapakowanych sztabkami złota i srebra 40 skrzynek, w zależności od podanych warunków początkowych

Microsoft Excel jest aplikacją komercyjną. Istnieje jednak wiele darmowych implementacji oferujących podobne możliwości. Na uwagę zasługuje tu szczególnie wspomniany na początku OpenOffice.org Calc. Nie ma on dotychczas wbudowanego odpowiednika programu Solver. Dostępne są co prawda rozszerzenia takie **Optimization Solver** – *http://wiki.services.openoffice.org/wiki/Optimization_Solver* czy **EuroOffice Solver** – *http://extensions.services.openoffice.org/project/eurooffice-solver*, ale ustępują one póki co dodatkowi oferowanego przez Microsoft Excel. W nowej wersji OpenOffice.org oznaczonej numerem 3, nad którą właśnie trwają prace, Solver jest jednym z podstawowych rozszerzeń, które mają zwiększyć jego funkcjonalność (patrz *http://pl.wikibooks.org/wiki/OpenOffice.org/OOo_3*). Już niedługo zatem dowiemy się, czy i na tym polu supremacja produktu firmy Microsoft zostanie przełamana.

Bibliografia i źródła

1. Dryja M., Jankowscy J. i M. (1988) *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne Warszawa.
2. http://pl.wikipedia.org
3. http://www.winter.pl/internet/arkusze.html
4. http://www.aresluna.org/attached/computerhistory/articles/25latzakratkami