ROCZNIK NAUKOWY WYDZIAŁU ZARZĄDZANIA W CIECHANOWIE 3-4 (III) 2009

INFORMATYKA I MATEMATYKA

Michał Baran

WYCENA OPCJI WIELOWYMIAROWYCH

[**Słowa kluczowe:** rynek finansowy, wycena opcji, wielowymiarowy proces Wienera]

Streszczenie.

W pracy rozważany jest model rynku finansowego z szumem danym przez wielowymiarowy skorelowany proces Wienera. Wyprowadzone zostały analityczne wzory na ceny typowych kontraktów finansowych, w których wypłaty zależą od cen kilku akcji.

1. Wstęp

Wycena i zabezpieczanie kontraktów finansowych są najważniejszym zagadnieniem współczesnej inżynierii finansowej. Rozwiązanie tych problemów zależy w głównej mierze od przyjętego modelu probabilistycznego, którego zadaniem jest w miarę dokładne opisanie rzeczywistych rynków finansowych. Jednym z najbardziej powszechnych modeli używanych w praktyce jest model Blacka-Scholesa, który mimo pewnych istotnych mankamentów ma tę zaletę, że sporą ilość kontraktów można wycenić w sposób analityczny. Wyprowadzone wzory mogą być bezpośrednio stosowane po wyestymowaniu potrzebnych parametrów. Klasycznym przykładem jest powszechnie znany i stosowany wzór na cenę opcji kupna lub sprzedaży. W przypadku gdy kontrakt finansowy jest bardziej skomplikowany, tzn. wypłaty z kontraktu mają nieregularną strukturę lub zależą od cen kilku akcji, to wówczas w praktyce wycenia się je przy pomocy metod symulacyjnych opartych o metodę Monte Carlo. Przy pomocy symulacji otrzymuje się przybliżoną wartość ceny, dokładniej uzyskuje się pewien estymator ceny. Główne zadanie polega na zminimalizowaniu wariancji tego estymatora jak również na upraszczaniu algorytmów symulacyjnych w celu zminimalizowania kosztów przeprowadzanych obliczeń. Przykłady algorytmów wyceniających kontrakty finansowe można znaleźć na przykład w książce [2]. Okazuje się jednak, że dla pewnej klasy opcji wielowymiarowych można wyprowadzić analityczne wzory na ich ceny co oznacza, że nie ma potrzeby wyceniania ich przy pomocy symulacji. W pracy wyprowadzone zostały wzory na ceny typowych opcji używanych w praktyce, w których wypłata zależy od cen dwóch akcji. W niektórych przypadkach obliczenia mogą zostać uogólnione na większą liczbę akcji. Wyceny dokonujemy w modelu Blacka-Scholesa ze skorelowanym wielowymiarowym procesem Wienera. Uzyskane wzory mogą być stosowane w praktyce. Do ich wykorzystania potrzebna jest znajomość wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego jak również umiejętność wyliczania z niej całek. Wyliczenia takie można przeprowadzić w powszechnie dostępnych programach, np. Mathematica, Matlab, Maple.

Praca ma następujący układ: w Rozdziale 2 podajemy opis kilku opcji wielowymiarowych; Rozdział 3 zawiera przypomnienie podstawowych faktów dotyczących wielowymiarowego rozkładu normalnego; w Rozdziale 4 opisujemy rynek finansowy, na którym wyceniane będą kontrakty; Rozdział 5 zawiera wyprowadzenia wzorów na ceny opcji opisanych w Rozdziale 2.

2. Przykłady opcji wielowymiarowych

Poniżej przedstawiamy kilka przykładów opcji wielowymiarowych. Wszystkie z nich mogą i najczęściej są wykorzystywane w celach spekulacyjnych. Jednak niektóre z nich mogą być wykorzystywane w celu osłony przed rzeczywistym ryzykiem inwestycyjnym. Ze względu na brak ujednoliconej polskiej terminologii dotyczącej nazewnictwa kontraktów finansowych stosujemy terminologię angielską.

Digital option: $H = K \cdot \mathbf{1}_A$
Jest to opcja inaczej nazywana binarną, w której wypłata w stałej wysokości K zależy od tego czy zajdzie pewne zdarzenie A. Jeśli zdarzenie A nie zajdzie, to posiadacz opcji nic nie dostaje. Samo zdarzenie A może zależeć od wartości kilku akcji, np. może być postaci $A = \{S_T^1 \geqslant S_T^2\}$, czyli zachodzi jeśli cena akcji w chwili T przekroczy cenę innej akcji. Opcje te są wykorzystywane głównie w celach spekulacyjnych.

Outperformance option: $H = (\max\{S_T^1, S_T^2\} - K)^+$
Załóżmy, że inwestor chce zapewnić sobie możliwość kupna, po ustalonej obecnie cenie K, akcji jednej z dwóch firm. Decyzję o tym, którą firmę wybierze podejmuje w chwili końcowej. Realizację tego planu umożliwi inwestorowi nabycie opcji "outperformance", w której wypłata jest równa nadwyżce maksimum z cen ponad poziom K.

Quantos
Quantos są to opcje walutowe, tzn. takie w których wypłata zależy nie tylko od ceny akcji na obcym rynku ale także od stopy wymiany obcej waluty. Istnieją dwa rodzaje tych opcji zależne od tego czy wypłata z kontraktu rozliczana jest w walucie rodzimej czy też obcej.
a) *Wypłata w walucie rodzimej:* $H = S_T^2(S_T^1 - K)^+$
Niech S_T^1 oznacza cenę akcji w chwili T na obcym rynku wyrażoną np. w EUR, zaś S_T^2 cenę EUR wyrażoną w PLN. Wówczas nabywca opcji zapewnia sobie prawo zakupu akcji po cenie K EUR. Wypłata z kontraktu rozliczana jest w walucie rodzimej, tj. w PLN.
b) *Wypłata w obcej walucie:* $H = \left(S_T^1 - \frac{K}{S_T^2}\right)^+$
Przykład jest podobny do poprzedniego z tym, że cena K po której inwestor chce kupić akcje w chwili T wyrażona jest w PLN zaś wypłata z kontraktu rozliczana jest w EUR.

Spread option: $H = (S_T^1 - S_T^2 - K)^+$

Jest to kontrakt, który pozwala zabezpieczyć się przed zbyt dużą różnicą wartości dwóch akcji. Może też służyć do zabezpieczenia ryzyka wahań kursów walutowych. Załóżmy, że polska firma sprowadza towar z USA i sprzedaje go w strefie euro. Wówczas dla firmy korzystna jest sytuacja w której euro jest drogie w stosunku do dolara. Jeśli różnica pomiędzy ceną USD a EUR jest zbyt duża, to firma ponosi straty. Kontrakt pozwala na ustalenie maksymalnej wartości różnicy cen pomiędzy USD a EUR jaką firma jest w stanie zaakceptować.

3. Wielowymiarowy rozkład normalny

W rozdziale tym przedstawimy podstawowe własności wielowymiarowego rozkładu normalnego, z których korzystać będziemy przy obliczaniu cen w Rozdziale 5. Własności te można znaleźć w podręcznikach z rachunku prawdopodobieństwa lub statystyki, np. [4].

Definicja 3.1 *Wektor losowy X przyjmujący wartości w $\mathbb{R}^d$ ma rozkład normalny z parametrami m, Σ , gdzie $m \in \mathbb{R}^d$ zaś Σ jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną wymiarów $d \times d$, jeśli jego funkcja gęstości dana jest wzorem*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} (det\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T \Sigma^{-1} (x-m)}, \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1}$$

Wektor m jest wartością oczekiwaną, zaś Σ macierzą kowariancji wektora X, tzn. $\mathbf{E}X = m,\ CovX = \Sigma$. *Piszemy wówczas $X \sim N_d(m, \Sigma)$.*

Rozkład jednowymiarowy ze średnią $m \in \mathbb{R}$, i wariancją $\sigma > 0$ będziemy oznaczać symbolem $N(m, \sigma)$.

Twierdzenie 3.2 *Wektor losowy X ma rozkład $N_d(m, \Sigma)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $a \in \mathbb{R}^d$ zmienna losowa*

$$a^T X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... a_d X_d$$

ma rozkład $N(a^T m, a^T \Sigma a)$.

Twierdzenie 3.3 *Jeśli wektor X ma rozkład $N_d(m, \Sigma)$, zaś A jest macierzą o wymiarach $k \times d$, to wówczas wektor losowy AX ma rozkład $N_k(Am, A\Sigma A^T)$.*

Niech X będzie wektorem losowym o wartościach w $\mathbb{R}^d$ i niech $0 < k < m$. Podzielmy wektor X na dwa podwektory $X^{(1)}$ oraz $X^{(2)}$ o długościach k i $d - k$ odpowiednio, tzn.

$$X^{(1)} = (X_1, X_2, ..., X_k)^T, \qquad X^{(2)} = (X_{k+1}, X_{k+2}, ..., X_d)^T.$$

Analogiczną operację przeprowadźmy na wektorze m oraz macierzy Σ, tzn.

$$m = \begin{pmatrix} m^{(1)} \\ m^{(2)} \end{pmatrix}; \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma^{(11)} & \Sigma^{(12)} \\ \Sigma^{(21)} & \Sigma^{(22)} \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{E}X^{(1)} = m^{(1)}$, $\mathbf{E}X^{(2)} = m^{(2)}$, $CovX^{(1)} = \Sigma^{(11)}$, $CovX^{(2)} = \Sigma^{(22)}$, $Cov(X^{(1)}, X^{(2)}) = \Sigma^{(12)} = {\Sigma^{(21)}}^T$. Poniższe twierdzenie charakteryzuje rozkład warunkowy wektora $X^{(1)}$ pod warunkiem wektora $X^{(2)}$. Rozkład ten będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{L}(X^{(1)} \mid X^{(2)})$.

Twierdzenie 3.4 *Niech $X \sim N_d(m, \Sigma)$ przy czym macierz $\Sigma^{(22)}$ jest nieosobliwa. Wówczas*

$$\mathcal{L}\left(X^{(1)} \mid X^{(2)} = x^{(2)}\right)$$
$$= N_k\left(m^{(1)} + \Sigma^{(12)}{\Sigma^{(22)}}^{-1}(x^{(2)} - m^{(2)}),\ \Sigma^{(11)} - \Sigma^{(12)}{\Sigma^{(22)}}^{-1}\Sigma^{(21)}\right).$$

W szczególności, gdy $k = 2$ oraz

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}; \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix},$$

to wówczas

$$\mathcal{L}(X_1 \mid X_2 = x_2) = N\left(m_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2 - m_2),\ \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}\right).$$

4. Model rynku finansowego

Niech $(\Omega, \mathcal{F}_t, t \in [0,T], P)$ będzie ustaloną przestrzenią probabilistyczną z filtracją. Rynek cen akcji opisany jest przez d procesów cen akcji o dynamice typu Blacka-Scholesa, tzn.

$$dS_t^i = S_t^i(\alpha_i dt + \sigma_i dW_t^i), \qquad i = 1, 2, ..., d,\ t \in [0, T],$$

gdzie $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2, ..., d$. Współczynniki α_i, σ_i są nazywane dryfem oraz zmiennością (volatility) i-tej akcji. Procesy $W^1, W^2, ..., W^d$ są adaptowane do filtracji $\mathcal{F}_t; t \in [0, T]$ i skorelowane. Dokładniej, proces $W = (W^1, W^2, ..., W^d)$ jest Q *procesem Wienera*, tzn. jego współrzędne są standardowymi procesami Wienera, zaś macierz

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \cdots & \rho_{1,d} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} & \cdots & \rho_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{d,1} & \rho_{d,2} & \rho_{d,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $\rho_{i,j} = \rho_{j,i} \in [-1, 1]$ dla $i, j = 1, 2, ..., d$ opisuje korelacje pomiędzy współrzędnymi procesu W w chwili 1, tzn.

$$\rho_{i,j} = cor\left\{W_1^i, W_1^j\right\}, \quad i, j = 1, 2, ..., d.$$

Zakładać będziemy, że $Q > 0$ tzn. że macierz Q jest ściśle dodatnio określona. Poza możliwością inwestowania w akcje można kapitał zdeponować na rachunku bankowym o stałej stopie procentowej r. Wówczas dynamika ceny depozytu bankowego dana jest wzorem

$$dB_t = rB_t dt, \quad t \in [0, T].$$

Uwaga 4.1 *Opisany powyżej model rynku finansowego jest znany w literaturze, jednakże jest on wykorzystywany głównie pod kątem przeprowadzania symulacji, patrz np. [2]. Ze względu na prostotę rachunkową przy wycenianiu, rynek częściej opisuje się przy użyciu niezależnych procesów Wienera, patrz [3], Przykład 4.4 str. 196. Modele o większym stopniu ogólności oparte są o niezależne procesy Wienera, gdzie współczynnik zmienności ma wiele składowych, patrz np. [5].*

Poniżej opiszemy *miarę martyngałową* $\tilde{P}$ w rozpatrywanym modelu, tzn. prawdopodobieństwo równoważne P o tej własności, że zdyskontowane ceny akcji $\hat{S}_t^i := e^{-rt} S_t^i, i = 1, 2, ..., d$ są lokalnymi martyngałami względem $\tilde{P}$. Miara martyngałowa jest kluczowym pojęciem z punktu widzenia wyceny kontraktów finansowych. Przy jej wyznaczaniu posłużymy się wersją twierdzenia Girsanova dla Q procesu Wienera. Poniższe twierdzenie jest uproszczoną wersją twierdzenia w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych, patrz [1], Twierdzenie 10.14.

Twierdzenie 4.2 *Załóżmy, że φ jest prognozowalnym procesem o wartościach w $\mathbb{R}^d$ spełniającym warunek*

$$\mathbf{E}\left(e^{\int_0^T (Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t, dW_t) - \frac{1}{2}\int_0^T |\varphi_t|^2 dt}\right) = 1.$$

Wówczas proces

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t Q^{\frac{1}{2}}\varphi_s ds, \qquad t \in [0, T],$$

jest Q procesem Wienera przy mierze $\tilde{P}$ o gęstości danej wzorem

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = e^{\int_0^T (Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t, dW_t) - \frac{1}{2}\int_0^T |\varphi_t|^2 dt}.$$

Można pokazać, że każda miara równoważna mierze P jest scharakteryzowana poprzez proces gęstości względem miary P postaci

$$Z_t := e^{\int_0^t (Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_s, dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\varphi_s|^2 ds}, \tag{4.2}$$

gdzie φ jest pewnym procesem prognozowalnym o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Przypomnijmy, że $\hat{S}^i$ jest $\tilde{P}$ lokalnym martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $\hat{S}^i Z$ jest P lokalnym martyngałem. Wobec tego miarę martyngałową wyznaczymy poprzez wskazanie w (4.2) procesu φ takiego, że $\hat{S}^i Z, i = 1, 2, ..., d$ będą P lokalnymi martyngałami. Mamy

$$\begin{aligned} d\hat{S}_t^i &= S_t^i \left((\alpha_i - r)dt + \sigma_i dW_t^i\right), \qquad i = 1, 2, ..., d, \ t \in [0, T], \\ dZ_t &= Z_t (Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t, dW_t), \end{aligned}$$

i jako konsekwencja wzoru Itô, patrz [6], Twierdzenie 3.6 s.153, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
d(Z_t\hat{S}_t^i) &= Z_t d\hat{S}_t^i + \hat{S}_t^i dZ_t + d < \hat{S}_t^i, Z_t > \\
&= Z_t\hat{S}_t^i\left((\alpha_i - r)dt + \sigma_i dW_t^i\right) + \hat{S}_t^i Z_t(Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t, dW_t) + Z_t\hat{S}_t^i\sigma_i\sum_{j=1}^{d}(Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t)_j\rho_{j,i}dt.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Symbolem $(Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t)_j$ powyżej oznaczyliśmy j-tą składową wektora $Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t$. Oznaczmy przez q_i i-tą kolumnę macierzy Q, tzn. $q_i = (\rho_{1,i}, \rho_{2,i}, ..., \rho_{d,i},)^T$. Wówczas wzór (4.3) możemy zapisać w postaci

$$
\begin{aligned}
d(Z_t\hat{S}_t^i) &= Z_t\hat{S}_t^i((\alpha_i - r)dt + \sigma_i dW_t^i) + \hat{S}_t^i Z_t(Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t, dW_t) + Z_t\hat{S}_t^i\sigma_i(Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t, q_i)dt \\
&= Z_t\hat{S}_t^i((\alpha_i - r) + \sigma_i(Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t, q_i))dt + Z_t\hat{S}_t^i\sigma_i dW_t^i + Z_t\hat{S}_t^i(Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t, dW_t).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Zatem S^iZ jest P lokalnym martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy dryf we wzorze (4.4) znika, tzn.

$$\alpha_i - r + \sigma_i(q_i, Q^{-\frac{1}{2}}\varphi_t) = 0.$$

Powyższy warunek musi być spełniony dla każdego $i = 1, 2, ..., d$, więc w postaci macierzowej przyjmuje on następującą formę

$$QQ^{-\frac{1}{2}}\varphi_t = -\frac{\alpha - r\mathbf{1}_d}{\sigma} := -\begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} \\ \frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_d - r}{\sigma_d} \end{bmatrix}.$$

W konsekwencji proces φ jest stały i równy

$$\varphi = -Q^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\alpha - r\mathbf{1}_d}{\sigma}\right],$$

zaś proces gęstość miary martyngałowej $\tilde{P}$ przez niego wyznaczonej wyraża się wzorem

$$\tilde{Z}_t := e^{-(Q^{-1}[\frac{\alpha - r\mathbf{1}_d}{\sigma}], W_t) - \frac{1}{2}|Q^{-\frac{1}{2}}[\frac{\alpha - r\mathbf{1}_d}{\sigma}]|^2 t}.$$

Ponadto z Twierdzenia 4.2 wynika, że proces

$$\widetilde{W}_t := W_t + \frac{\alpha - r\mathbf{1}_d}{\sigma}\, t$$

jest Q procesem Wienera przy mierze $\tilde{P}$. Wówczas dynamika procesów cen akcji może być zapisana w postaci

$$dS_t^i = S_t^i(rdt + \sigma_i d\widetilde{W}_t^i), \quad i = 1, 2, ..., d.$$

zaś same ceny w postaci

$$S_t^i = S_0^i e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)t + \sigma_i \widetilde{W}_t^i}, \quad i = 1, 2, ..., d. \tag{4.5}$$

Z powyższych rozważań wynika ważny wniosek.

Wniosek 4.3 *Rozpatrywany rynek finansowy jest zupełny, tzn. istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa.*

5. Wycena

Definicja 5.1 *Kontraktem finansowym H nazywamy dowolną $\mathcal{F}_T$ mierzalną zmienną losową.*

Cenę kontraktu oznaczymy przez $p(H)$. Przypomnijmy, że jeśli H jest zmienną losową całkowalną względem prawdopodobieństwa $\tilde{P}$, to wówczas cena H dana jest wzorem

$$p(H) = \tilde{\mathbf{E}}[e^{-rT} H],$$

patrz np. [3], Twierdzenie 4.4 str. 180. Powyższy zapis oznacza, że cena H to wartość oczekiwana zdyskontowanej wypłaty liczona przy prawdopodobieństwie $\tilde{P}$.

Uwaga 5.2 *Załóżmy, że $H = H(S_T^1, S_T^2, ..., S_T^k)$, gdzie $k < d$, tzn. kontrakt finansowy zależy tylko od cen kilku pierwszych akcji. Wówczas korzystając z* (4.5) *możemy zapisać H jako pewną funkcję zależną od $\widetilde{W}_T^1, \widetilde{W}_T^2, ..., \widetilde{W}_T^k$, tzn. $H = f(\widetilde{W}_T^1, \widetilde{W}_T^2, ..., \widetilde{W}_T^k)$. Wartość oczekiwana zmiennej losowej $f(\widetilde{W}_T^1, \widetilde{W}_T^2, ..., \widetilde{W}_T^k)$ liczona przy prawdopodobieństwie $\tilde{P}$ zależy tylko od łącznego rozkładu wektora $(\widetilde{W}_T^1, \widetilde{W}_T^2, ..., \widetilde{W}_T^k)$. Nie zależy więc od d - liczby składowych procesu Wienera. Oznacza to, że możliwość inwestowania w akcje $S^{k+1}, S^{k+2}, ..., S^d$ nie ma wpływu na cenę kontraktu H mimo, że ceny tych akcji są skorelowane z cenami od których kontrakt zależy. W przypadku wyceny metodą Monte Carlo te dodatkowe akcje mogą posłużyć do redukcji wariancji estymatora ceny, patrz [2], Rozdział 4.1.*

5.1 Digital option

Wycenimy kontrakt dany wzorem:

$$H = K \cdot \mathbf{1}_{\{S_T^1 \geqslant S_T^2\}}, \quad \text{gdzie} \quad K \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Twierdzenie 5.3 *Cena kontraktu* (5.6) *wynosi*

$$p(H) = Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0^1}{S_0^2} + \frac{1}{2}(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)T}{\sqrt{T}\sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}} \right).$$

Dowód:

$$p(H) = \tilde{\mathbf{E}}[e^{-rT}K\mathbf{1}_{\{S_T^1 \geqslant S_T^2\}}] = Ke^{-rT}\tilde{P}(S_T^1 \geqslant S_T^2)$$

$$= Ke^{-rT}\tilde{P}\left(S_0^1 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2)T+\sigma_1\widetilde{W}_T^1} \geqslant S_0^2 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2)T+\sigma_2\widetilde{W}_T^2}\right)$$

$$= Ke^{-rT}\tilde{P}\left(\ln S_0^1 + (r-\frac{1}{2}\sigma_1^2)T + \sigma_1\widetilde{W}_T^1 \geqslant \ln S_0^2 + (r-\frac{1}{2}\sigma_2^2)T + \sigma_2\widetilde{W}_T^2\right)$$

$$= Ke^{-rT}\tilde{P}\left(\sigma_1\widetilde{W}_T^1 - \sigma_2\widetilde{W}_T^2 \geqslant \ln\frac{S_0^2}{S_0^1} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)T\right)$$

Korzystając z Twierdzenia 4.2 oraz Twierdzenia 3.3 otrzymujemy

$$p(H) = Ke^{-rT}\tilde{P}\left(\frac{\sigma_1\widetilde{W}_T^1 - \sigma_2\widetilde{W}_T^2}{\sqrt{(\sigma_1,-\sigma_2)^T Q(\sigma_1,-\sigma_2)T}} \geqslant \frac{\ln\frac{S_0^2}{S_0^1} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2)T}{\sqrt{(\sigma_1,-\sigma_2)^T Q(\sigma_1,-\sigma_2)T}}\right)$$

$$= Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0^1}{S_0^2} + \frac{1}{2}(\sigma_2^2-\sigma_1^2)T}{\sqrt{T}\sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}\right).$$

□

Zauważmy, że łatwo ustalić monotoniczność ceny kontraktu w zależności od współczynnika korelacji ρ. Załóżmy dla prostoty, że $K > 0$ oraz, że $S_0^1 = S_0^2$. Wówczas $p(H)$ jest rosnącą funkcją argumentu ρ jeśli $\sigma_2 > \sigma_1$ i malejącą jeśli $\sigma_1 > \sigma_2$.

5.2 Outperformance option

Wycenimy kontrakt postaci:

$$H = \left(\max\{S_T^1, S_T^2\} - K\right)^+, \quad K > 0. \tag{5.7}$$

Posłużymy się dwoma pomocniczymi lematami.

Lemat 5.4 *Niech wektor (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej $(0,0)$ i macierzy kowariancji*

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas dystrybuanta wektora (X,Y) dana jest wzorem

$$F_{X,Y}(a,b) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, \Phi\left(\frac{a-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dy, \qquad a,b \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Dowód: Wstawiając

$$Q^{-1} = \frac{1}{\rho^2 - 1} \begin{bmatrix} -1 & \rho \\ \rho & -1 \end{bmatrix},$$

do wzoru (3.1) otrzymujemy wzór na gęstość wektora (X, Y):

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det Q}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x,y)Q^{-1}(x,y)^T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}}.$$

Odcałkowując gęstość otrzymujemy dystrybuantę:

$$F_{X,Y}(a, b) = \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a} f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(x-\rho y)^2 - \rho^2 y^2 + y^2}{2(1-\rho^2)}} dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} dxdy = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{a-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, \Phi\left(\frac{a-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dy. \qquad \square$$

Lemat 5.5 *Rozkład zmiennej losowej*

$$Z := \max\{S_T^1, S_T^2\} \tag{5.9}$$

przy prawdopodobieństwie $\tilde{P}$ *ma dystrybuantę daną wzorem*

$$\tilde{F}_Z(t) = \int_{-\infty}^{b(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, \Phi\left(\frac{a(t) - \rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dy, \quad \text{dla } t > 0, \tag{5.10}$$

gdzie

$$a(t) := \frac{\ln \frac{t}{S_0^1} - (r - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \quad b(t) := \frac{\ln \frac{t}{S_0^2} - (r - \frac{1}{2}\sigma_2^2)T}{\sigma_2\sqrt{T}} \tag{5.11}$$

oraz gęstość daną wzorem

$$\tilde{f}_Z(t) = \frac{1}{t\sigma_2\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{b^2(t)}{2}}\, \Phi\left(\frac{a(t) - \rho b(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + \frac{1}{t\sigma_1\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{a^2(t)}{2}}\, \Phi\left(\frac{b(t) - \rho a(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right), \tag{5.12}$$

dla $t > 0$.

Dowód: Zachodzi wzór:

$$\tilde{F}_Z(t) = \tilde{P}(Z \leqslant t) =$$
$$= \tilde{P}(S_T^1 \leqslant t, S_T^2 \leqslant t) = \tilde{P}\Big(S_0^1 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2)T + \sigma_1 \widetilde{W}_T^1} \leqslant t, S_0^2 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2)T + \sigma_2 \widetilde{W}_T^2} \leqslant t\Big)$$

$$= \tilde{P}\left(\frac{\widetilde{W}_T^1}{\sqrt{T}} \leqslant \frac{\ln\frac{t}{S_0^1} - (r - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{\widetilde{W}_T^2}{\sqrt{T}} \leqslant \frac{\ln\frac{t}{S_0^2} - (r - \frac{1}{2}\sigma_2^2)T}{\sigma_2\sqrt{T}}\right)$$

$$= \tilde{P}\left(\frac{\widetilde{W}_T^1}{\sqrt{T}} \leqslant a(t), \frac{\widetilde{W}_T^2}{\sqrt{T}} \leqslant b(t)\right).$$

Wektor $\left(\frac{\widetilde{W}_T^1}{\sqrt{T}}, \frac{\widetilde{W}_T^2}{\sqrt{T}}\right)$ przy prawdopodobieństwie $\tilde{P}$ ma rozkład $N_2(0, Q)$. Korzystając ze wzoru (5.8) w Lemacie 5.4 otrzymujemy (5.10).

Wzór (5.12) otrzymujemy poprzez zróżniczkowanie $\tilde{F}_Z$. Posługujemy się regułą łańcuchową, którą stosujemy w następującym przypadku. Jeśli

$$h(x) = \int_{-\infty}^{z(x)} g(x, y)dy$$

to wówczas

$$\frac{dh(x)}{dx} = g(x, z(x)) \cdot z^{'}(x) + \int_{-\infty}^{z(x)} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dy.$$

Zatem

$$\tilde{f}_Z(t) = \tilde{F}_Z^{'}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{b^2(t)}{2}}\ \Phi\left(\frac{a(t) - \rho b(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \cdot \frac{1}{t\sigma_2\sqrt{T}}$$

$$+ \frac{1}{t\sigma_1\sqrt{T}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{b(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{y^2}{2}}\ \Phi^{'}\left(\frac{a(t) - \rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dy.$$

Uprośćmy ostatnią całkę.

$$\int_{-\infty}^{b(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{y^2}{2}}\ \Phi^{'}\left(\frac{a(t) - \rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dy = \int_{-\infty}^{b(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{y^2}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(a(t)-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{b(t)} e^{-\frac{(y-\rho a(t))^2 + a^2(t)(1-\rho^2)}{2(1-\rho^2)}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{a^2(t)}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{b(t)-\rho a(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{1-\rho^2}\ dz$$

$$= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{a^2(t)}{2}}\ \Phi\left(\frac{b(t) - \rho a(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\tilde{f}_Z(t) = \frac{1}{t\sigma_2\sqrt{2\pi T}}\ e^{-\frac{b^2(t)}{2}}\ \Phi\left(\frac{a(t) - \rho b(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + \frac{1}{t\sigma_1\sqrt{2\pi T}}\ e^{-\frac{a^2(t)}{2}}\ \Phi\left(\frac{b(t) - \rho a(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

□

Twierdzenie 5.6 *Cena kontraktu* (5.7) *dana jest wzorem*

$$p(H) = \frac{e^{-rT}}{\sigma_2\sqrt{T}} \int_K^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{b^2(t)}{2}}\, \Phi\left(\frac{a(t)-\rho b(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dt$$

$$+ \frac{e^{-rT}}{\sigma_1\sqrt{T}} \int_K^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{a^2(t)}{2}}\, \Phi\left(\frac{b(t)-\rho a(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dt$$

$$- Ke^{-rT} \int_{b(t)}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, \Phi\left(\frac{a(t)-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dy,$$

gdzie $a(t), b(t)$ *dane są wzorem* (5.11).

Dowód: Niech Z będzie dana wzorem (5.9). Wówczas korzystając ze wzorów (5.10) i (5.12) w Lemacie 5.5 otrzymujemy

$$p(H) = \tilde{E}\Big(e^{-rT}(Z-K)^+\Big) = e^{-rT}\tilde{E}(Z\mathbf{1}_{\{Z>K\}}) - Ke^{-rT}\tilde{P}(Z>K)$$

$$= e^{-rT}\int_K^\infty t\cdot \tilde{f}_Z(t)dt - Ke^{-rT}(1-\tilde{F}_Z(K))$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\sigma_2\sqrt{T}} \int_K^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{b^2(t)}{2}}\, \Phi\left(\frac{a(t)-\rho b(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dt$$

$$+ \frac{e^{-rT}}{\sigma_1\sqrt{T}} \int_K^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{a^2(t)}{2}}\, \Phi\left(\frac{b(t)-\rho a(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dt$$

$$- Ke^{-rT} \int_{b(t)}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, \Phi\left(\frac{a(t)-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dy.$$

$\square$

5.3 Quantos

5.3.1 Opcja rozliczana w rodzimej walucie

Wycenimy kontrakt:

$$H = S_T^2(S_T^1 - K)^+, \quad K > 0. \tag{5.13}$$

Twierdzenie 5.7 *Cena kontraktu* (5.13) *wynosi*

$$p(H) = S_0^1 S_0^2 e^{(r+\rho\sigma_1\sigma_2)T}\Phi\left(\frac{T(\sigma_1+\rho\sigma_2)-a}{\sqrt{T}}\right) - KS_0^2\Phi\left(\frac{T\rho\sigma_2 - a}{\sqrt{T}}\right),$$

gdzie

$$a := \frac{\ln\frac{K}{S_0^1} - (r - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T}{\sigma_1}. \tag{5.14}$$

Dowód: Mamy:

$$p(H) = \tilde{E}\left(e^{-rT}S_T^2(S_T^1 - K)^+\right) = \tilde{E}\left(e^{-rT}S_T^1S_T^2\mathbf{1}_{\{S_T^1>K\}}\right) - Ke^{-rT}\tilde{E}\left(S_T^2\mathbf{1}_{\{S_T^1>K\}}\right) \tag{5.15}$$

Zapisując zdarzenie

$$\{S_T^1 > K\} = \{\widetilde{W}_T^1 > a\},$$

gdzie a jest dane wzorem (5.14), otrzymujemy

$$\tilde{E}\left(e^{-rT}S_T^1S_T^2\mathbf{1}_{\{S_T^1>K\}}\right) = e^{-rT}S_0^1S_0^2e^{(2r-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2))T}\tilde{E}\left(e^{\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2}\mathbf{1}_{\{\widetilde{W}_T^1>a\}}\right)$$

$$= S_0^1S_0^2e^{(r-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2))T}\tilde{E}\left(e^{\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2} \mid \widetilde{W}_T^1 > a\right)\cdot\tilde{P}\left(\widetilde{W}_T^1 > a\right)$$

$$= S_0^1S_0^2e^{(r-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2))T}\int_a^\infty \tilde{E}\left(e^{\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2} \mid \widetilde{W}_T^1 = y\right)\cdot\tilde{f}_{\widetilde{W}_T^1}(y)dy.$$

Wektor losowy $(\widetilde{W}_T^1, \widetilde{W}_T^2)$ ma przy mierze $\tilde{P}$ rozkład $N_2((0,0)^T, \Sigma)$, gdzie elementy macierzy Σ wynoszą $\sigma_{11} = \sigma_{22} = T$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho T$. Zatem z Twierdzenia 3.4 wynika, że

$$\mathcal{L}(\widetilde{W}_T^2 \mid \widetilde{W}_T^1 = a) = N(\rho a, T(1-\rho^2)). \tag{5.16}$$

Przypomnijmy także, że jeśli $X \sim N(m,\sigma)$ to wówczas

$$E(e^X) = e^{m+\frac{1}{2}\sigma}. \tag{5.17}$$

Korzystając z (5.16) oraz (5.17) otrzymujemy

$$\tilde{E}\left(e^{-rT}S_T^1S_T^2\mathbf{1}_{\{S_T^1>K\}}\right) = S_0^1S_0^2e^{(r-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2))T}\int_a^\infty e^{\sigma_1 y}\cdot e^{\sigma_2\rho y+\frac{1}{2}\sigma_2^2T(1-\rho^2)}\cdot\tilde{f}_{\widetilde{W}_T^1}(y)dy$$

$$= S_0^1S_0^2e^{(r-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2))T}\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\cdot e^{y(\sigma_1+\rho\sigma_2)+\frac{1}{2}\sigma_2^2T(1-\rho^2)}\cdot e^{-\frac{y^2}{2T}}dy$$

$$= S_0^1S_0^2e^{(r-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\rho^2\sigma_2^2))T}\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\cdot e^{-\frac{y^2-2Ty(\sigma_1+\rho\sigma_2)}{2T}}dy$$

$$= S_0^1 S_0^2 e^{(r-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\rho^2\sigma_2^2))T} e^{\frac{1}{2}T(\sigma_1+\rho\sigma_2)^2} \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot e^{-\frac{(y-T(\sigma_1+\rho\sigma_2))^2}{2T}} dy$$

$$= S_0^1 S_0^2 e^{(r+\rho\sigma_1\sigma_2)T} \int_{\frac{a-T(\sigma_1+\rho\sigma_2)}{\sqrt{T}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= S_0^1 S_0^2 e^{(r+\rho\sigma_1\sigma_2)T} \Phi\left(\frac{T(\sigma_1+\rho\sigma_2)-a}{\sqrt{T}}\right). \tag{5.18}$$

Drugą wartość oczekiwana we wzorze (5.15) uzyskujemy takim samym sposobem

$$\tilde{E}\left(e^{-rT} S_T^2 \mathbf{1}_{\{S_T^1>K\}}\right) = S_0^2 \Phi\left(\frac{T\rho\sigma_2 - a}{\sqrt{T}}\right). \tag{5.19}$$

Uwzględniając (5.18) i (5.19) otrzymujemy

$$p(H) = S_0^1 S_0^2 e^{(r-\rho\sigma_1\sigma_2)T} \Phi\left(\frac{T(\sigma_1+\rho\sigma_2)-a}{\sqrt{T}}\right) - K S_0^2 \Phi\left(\frac{T\rho\sigma_2 - a}{\sqrt{T}}\right).$$

□

5.3.2 Opcja rozliczana w obcej walucie

Wycenimy kontrakt

$$H = \left(S_T^1 - \frac{K}{S_T^2}\right)^+, \quad K > 0. \tag{5.20}$$

Twierdzenie 5.8 *Cena kontraktu* (5.20) *wynosi*

$$p(H) = S_0^1 \Phi\left(\frac{T(\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2)-a}{\sqrt{T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}\right) - \frac{K}{S_0^2} e^{(\sigma_2^2-2r)T} \Phi\left(-\frac{a+T(\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2)}{\sqrt{T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}\right)$$

gdzie

$$a = \ln\frac{K}{S_0^1 S_0^2} - \left(2r - \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\right)T. \tag{5.21}$$

Dowód: Mamy

$$p(H) = \tilde{E}\left(e^{-rT} S_T^1 \mathbf{1}_{\{S_T^1>\frac{K}{S_T^2}\}}\right) - \tilde{E}\left(e^{-rT} \frac{K}{S_T^2} \mathbf{1}_{\{S_T^1>\frac{K}{S_T^2}\}}\right) \tag{5.22}$$

Na początku zapiszmy zdarzenie $\{S_T^1 > \frac{K}{S_T^2}\}$ w terminach $(\widetilde{W}_T^1, \widetilde{W}_T^2)$.

$$\left\{S_T^1 > \frac{K}{S_T^2}\right\} = \left\{S_0^1 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2)T+\sigma_1\widetilde{W}_T^1} \cdot S_0^2 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2)T+\sigma_2\widetilde{W}_T^2} > K\right\} = \left\{\sigma_1\widetilde{W}_T^1 + \sigma_2\widetilde{W}_T^2 > a\right\},$$

gdzie a jest dane wzorem (5.21).

Następnie wyznaczmy rozkład warunkowy $\widetilde{W}_T^1$ pod warunkiem $\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2$ przy prawdopodobieństwie $\tilde{P}$. Ponieważ wektor $(\widetilde{W}_T^1, \sigma_1\widetilde{W}_T^1 + \sigma_2\widetilde{W}_T^2)$ jest transformacją liniową wektora $(\widetilde{W}_T^1, \widetilde{W}_T^2)$ z macierzą

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

to z Twierdzenia 3.3 wynika, że rozkład łączny tego wektora jest normalny ze średnią $(0,0)$ i macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & \rho T \\ \rho T & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & T(\sigma_1+\rho\sigma_2) \\ T(\sigma_1+\rho\sigma_2) & T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2) \end{bmatrix}.$$

Korzystając z Twierdzenia 3.4 otrzymujemy

$$\mathcal{L}(\widetilde{W}_T^1 \mid \sigma_1\widetilde{W}_T^1 + \sigma_2\widetilde{W}_T^2 = y) = N\left(y\frac{\sigma_1+\rho\sigma_2}{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}, \frac{T\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}\right).$$

Korzystając z powyższego wzoru,(5.17) oraz Twierdzenia 3.2 wyliczamy pierwszą wartość oczekiwaną we wzorze (5.22):

$$\tilde{E}\left(e^{-rT}S_T^1\mathbf{1}_{\{\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2>a\}}\right) = \tilde{E}\left(S_0^1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T+\sigma_1\widetilde{W}_T^1}\mathbf{1}_{\{\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2>a\}}\right)$$

$$= S_0^1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T}\int_a^\infty \tilde{E}(e^{\sigma_1\widetilde{W}_T^1} \mid \sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2 = y)\tilde{f}_{\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2}(y)dy$$

$$= S_0^1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T}\int_a^\infty e^{\frac{2y(\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2)+\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)T}{2(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)T}}e^{-\frac{y^2}{2T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}dy$$

$$= S_0^1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T}\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)T}}\cdot e^{-\frac{y^2-2Ty(\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2)-\sigma_1^2\sigma_2^2T^2(1-\rho^2)}{2T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}dy$$

$$= S_0^1 e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T}\ e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2 T}\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)T}}\cdot e^{-\frac{\left(y-T(\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2)\right)^2}{2T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}dy$$

$$= S_0^1\int_{\frac{a-T(\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2)}{\sqrt{T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$= S_0^1\Phi\left(\frac{T(\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2)-a}{\sqrt{T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}\right). \tag{5.23}$$

Podobnie pokazujemy, że:
$\mathcal{L}(\widetilde{W}_T^2 \mid \sigma_1\widetilde{W}_T^1 + \sigma_2\widetilde{W}_T^2 = y) = N\Big(y\frac{\sigma_2+\rho\sigma_1}{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}, \frac{T\sigma_1^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_1+\sigma_2^2}\Big)$. Przeprowadzając

analogiczne obliczenia wyznaczamy drugą wartość oczekiwaną we wzorze (5.22):

$$\tilde{E}\left(e^{-rT}\frac{K}{S_T^2}\mathbf{1}_{\{\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2>a\}}\right)=\frac{K}{S_0^2}e^{(\frac{1}{2}\sigma_2^2-2r)T}\tilde{E}\left(e^{-\sigma_2\widetilde{W_T^2}}\mathbf{1}_{\{\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2>a\}}\right)$$

$$=\frac{K}{S_0^2}e^{(\frac{1}{2}\sigma_2^2-2r)T}\int_a^\infty \tilde{E}(e^{-\sigma_2\widetilde{W_T^2}}\mid\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2=y)\tilde{f}_{\sigma_1\widetilde{W}_T^1+\sigma_2\widetilde{W}_T^2}(y)dy$$

$$=\frac{K}{S_0^2}e^{(\frac{1}{2}\sigma_2^2-2r)T}\int_a^\infty e^{\frac{-2y(\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2)+T\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{2(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)T}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_1+\sigma_2^2)}}dy$$

$$=\frac{K}{S_0^2}e^{(\frac{1}{2}\sigma_2^2-2r)T}\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)T}}e^{-\frac{y^2+2Ty(\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2)-\sigma_1^2\sigma_2^2T^2(1-\rho^2)}{2T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}dy$$

$$=\frac{K}{S_0^2}e^{(\frac{1}{2}\sigma_2^2-2r)T}e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2T}\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)T}}e^{-\frac{\left(y+T(\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2)\right)^2}{2T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}dy$$

$$=\frac{K}{S_0^2}e^{(\sigma_2^2-2r)T}\int_{\frac{a+T(\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2)}{\sqrt{T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{K}{S_0^2}e^{(\sigma_2^2-2r)T}\Phi\left(-\frac{a+T(\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2)}{\sqrt{T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}\right). \tag{5.24}$$

Uwzględniając (5.23) oraz (5.24) otrzymujemy

$$p(H)=S_0^1\Phi\left(\frac{T(\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2)-a}{\sqrt{T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}\right)-\frac{K}{S_0^2}e^{(\sigma_2^2-2r)T}\Phi\left(-\frac{a+T(\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2)}{\sqrt{T(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}\right)$$

□

5.4 Spread option

Wycenimy kontrakt postaci

$$H=(S_T^1-S_T^2-K)^+,\quad K>0. \tag{5.25}$$

Twierdzenie 5.9 *Zmienna losowa*

$$Z:=S_T^1-S_T^2 \tag{5.26}$$

ma przy mierze $\tilde{P}$ rozkład o dystrybuancie

$$\tilde{F}_Z(t)=\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\Phi\left(\frac{b(t,y)-\rho y}{\sqrt{T(1-\rho^2)}}\right)dy,\quad dla\ t>0 \tag{5.27}$$

i gęstości

$$\tilde{f}_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi T\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1(t + S_0^2 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2)T+\sigma_2 y})} \cdot e^{-\frac{y^2(T(1-\rho^2)+\rho^2)-2\rho b(t,y)y+b^2(t,y)}{2T(1-\rho^2)}} dy, \tag{5.28}$$

dla $t > 0$*, gdzie*

$$b(t,y) = \frac{1}{\sigma_1}\left(\ln\left(\frac{t + S_0^2 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2)T+\sigma_2 y}}{S_0^1}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T\right) \quad dla \quad t > 0,\ y \in \mathbb{R}. \tag{5.29}$$

Dowód: Dla $t > 0$ można sprawdzić równość zdarzeń

$$\left\{S_T^1 - S_T^2 \leqslant t\right\} = \left\{\widetilde{W}_T^1 \leqslant \frac{1}{\sigma_1}\left(\ln\left(\frac{t + S_0^2 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2)T+\sigma_2 \widetilde{W}_T^2}}{S_0^1}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T\right)\right\}.$$

Wektor $(\widetilde{W}_T^1, \widetilde{W}_T^2)$ przy mierze $\tilde{P}$ ma rozkład o gęstości

$$\tilde{f}_{\widetilde{W}_T^1,\widetilde{W}_T^2}(x,y) = \frac{1}{2\pi T\sqrt{(1-\rho^2)}} \cdot e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2T(1-\rho^2)}},$$

z czego wynika wzór na dystrybuantę zmiennej Z:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_Z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{b(t,y)} \frac{1}{2\pi T\sqrt{(1-\rho^2)}} \cdot e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2T(1-\rho^2)}} dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2T}} \int_{-\infty}^{b(t,y)} \frac{1}{2\pi T\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2T(1-\rho^2)}} dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{b(t,y)-\rho y}{\sqrt{T(1-\rho^2)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}} dzdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \Phi\left(\frac{b(t,y)-\rho y}{\sqrt{T(1-\rho^2)}}\right) dy.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Różniczkując (5.30) otrzymujemy wzór na gęstość:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_Z(t) =& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \Phi'\left(\frac{b(t,y)-\rho y}{\sqrt{T(1-\rho^2)}}\right) \frac{1}{\sigma_1(t + S_0^2 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2)T+\sigma_2 y})\sqrt{T(1-\rho^2)}}\, dy \\
=& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi T\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1(t + S_0^2 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2)T+\sigma_2 y})} \cdot e^{-\frac{y^2(T(1-\rho^2)+\rho^2)-2\rho b(t,y)y+b^2(t,y)}{2T(1-\rho^2)}} dy.
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 5.10 *Cena kontraktu* (5.25) *wynosi*

$$p(H) = e^{-rT} \int_K^\infty t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2\pi T\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1(t + S_0^2 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2)T+\sigma_2 y})} \cdot e^{-\frac{y^2(T(1-\rho^2)+\rho^2)-2\rho b(t,y)y+b^2(t,y)}{2T(1-\rho^2)}} dydt$$

$$-Ke^{-rT}\left(1 - \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{y^2}{2}} \Phi\left(\frac{b(K,y)-\rho y}{\sqrt{T(1-\rho^2)}}\right) dy\right),$$

gdzie $b(t,y)$ *dane jest wzorem* (5.29).

Dowód: Uwzględniając (5.27) i (5.28) otrzymujemy

$$p(H) = \tilde{E}\left(e^{-rT}(S_T^1 - S_T^2)\mathbf{1}_{\{S_T^1 - S_T^2 > K\}}\right) - Ke^{-rT}\tilde{P}(S_T^1 - S_T^2 > K)$$

$$= e^{-rT}\int_K^\infty t\tilde{f}_Z(t)dt - e^{-rT}K(1 - \tilde{F}_Z(K))$$

$$= e^{-rT} \int_K^\infty t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2\pi T\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1(t + S_0^2 e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T+\sigma_2 y})} \cdot e^{-\frac{y^2(T(1-\rho^2)+\rho^2)-2\rho b(t,y)y+b^2(t,y)}{2T(1-\rho^2)}} dydt$$

$$- Ke^{-rT}\left(1 - \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{y^2}{2}} \Phi\left(\frac{b(K,y)-\rho y}{\sqrt{T(1-\rho^2)}}\right) dy\right).$$

□

Bibliografia

[1] G. Da Prato, J. Zabczyk, (1992); *Stochastic equations in infinte dimensions*, Cambridge University Press.

[2] P. Glasserman, (2003); *Monte Carlo methods in financial Engineering*, Springer.

[3] J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner, (2003); *Matematyka finansowa, instrumenty pochodne*, WNT.

[4] R.A. Johnson, D.W. Wichern, (2007); *Applied Multivariate Statistical Analysis* (6th Edition), Prentice Hall.

[5] I. Karatzas, (1997); *Lectures on the Mathematics of Finance*, CRM Monograph Series.

[6] I. Karatzas, (1998); *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer.