

Jan Rusinek

MATEMATYKA
DLA STUDENTÓW ZARZĄDZANIA

WYŻSZA SZKOŁA MENEDŻERSKA
Wydział Zarządzania w Ciechanowie

Recenzent: prof. dr hab. Marek Garbicz

Spis treści

Od autora	9
Rozdział 1. Elementy rachunku zdań i algebry zbiorów	11
1.1. Zdania	11
1.2. Kwantyfikatory	14
1.3. Zbiory	16
1.4. Iloczyn kartezjański	19
1.5. Zbiór liczb rzeczywistych	21
Rozdział 2. Funkcje	25
2.1. Pojęcie funkcji	25
2.2. Wykres funkcji	27
2.3. Złożenie funkcji	32
2.4. Funkcje różnowartościowe i funkcja odwrotna	34
2.5. Funkcje rosnące, malejące, parzyste, nieparzyste	36
2.6. Funkcje elementarne	38
2.7. Równania równowagi	46
Rozdział 3. Ciągi	49
3.1. Pojęcie ciągu	49
3.2. Ciągi zbieżne	52
3.3. Podstawowe wzory	52
3.4. Ciągi rozbieżne do ∞	53
3.5. Twierdzenie o trzech ciągach	54
3.6. Ciągi monotoniczne	55
3.7. Liczba e i oprocentowanie ciągłe	55
Rozdział 4. Funkcje ciągłe	59
4.1. Granica funkcji w punkcie	59
4.2. Ciągłość funkcji	63
4.3. Ciągłość funkcji odwrotnej	66
4.4. Własność Darboux funkcji ciągłej	66
Rozdział 5. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej ..	71
5.1. Pojęcie pochodnej	71
5.2. Interpretacje pochodnej	72
5.3. Podstawowe wzory	76
5.4. *Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a	78
5.5. Model Domara	79
5.6. Monotoniczność i ekstrema	82
5.7. Wyznaczanie największej (najmniejszej) wartości funkcji	87

5.8. Reguła de l'Hospitala	93
5.9. Pochodna drugiego rzędu	94
5.10. Funkcje wypukłe i wklęsłe	95
5.11. Asymptoty	100
5.12. Schemat badania funkcji	102
Rozdział 6. Elementy rachunku całkowego	107
6.1. Całka nieoznaczona	107
6.2. Całka oznaczona	110
6.3. Interpretacje całki oznaczonej	112
6.4. Całka niewłaściwa	114
Rozdział 7. Elementy algebry liniowej	117
7.1. Model liniowy rynku wielu dóbr	117
7.2. *Przestrzenie liniowe	118
7.3. *Przekształcenia liniowe	121
7.4. Macierze	122
7.5. Macierze kwadratowe	125
7.6. Wyznacznik macierzy kwadratowej	126
7.7. *Wyznacznik jako przekształcenie na wektorach	129
7.8. Rząd macierzy	131
7.9. Macierz odwrotna	132
7.10. *Macierze jako przekształcenia liniowe	133
7.11. Układy równań liniowych	135
7.12. *Układ równań jako równanie wektorowe	135
7.13. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego	136
7.14. *Uzasadnienie wzorów Cramera	136
7.15. Wzory Cramera	137
7.16. Model dochodu narodowego	139
7.17. *Przekształcenie odwrotne	141
7.18. Rozwiązywanie układów równań przy pomocy macierzy odwrotnej	141
7.19. Układy z różną liczbą niewiadomych i równań	142
7.20. Rozwiązania bazowe	144
7.21. Operacje elementarne	146
7.22. Rozwiązywanie układów równań przy pomocy operacji elementarnych	149
7.23. Model nakładów i wyników Leontiefa	153
Rozdział 8. Funkcje wielu zmiennych	157
8.1. Pojęcie funkcji wielu zmiennych	157

8.2. Dziedzina i wykres funkcji wielu zmiennych	158
8.3. Poziomice funkcji	161
8.4. Ciągłość funkcji wielu zmiennych	162
8.5. Pochodne cząstkowe	164
8.6. Gradient funkcji	166
8.7. Zastosowanie pochodnych cząstkowych	167
8.8. Model dochodu narodowego	183
8.9. Metoda najmniejszych kwadratów	186
Odpowiedzi	191
Indeks	195

Od autora

Podręcznik ten jest nowym opracowaniem książek wydanej w latach 2000 i 2005. Powstał na bazie wykładów i ćwiczeń prowadzonych przez autora w Wyższej Szkole Menedżerskiej w latach na studiach dziennych, wieczorowych i zaocznych. W porównaniu z poprzednimi wersjami nastąpiły pewne zmiany, spowodowane przede wszystkim zmianami treści programowych przedmiotu matematyka na kierunku zarządzanie. M. in. doszedł rozdział poświęcony równaniom różniczkowym i różnicowym, a usunięty został rozdział poświęcony matematyce finansowej. Ten ostatni materiał ten razem z wieloma nowymi zagadnieniami został umieszczony w osobnym podręczniku autora „Elementy matematyki finansowej z wybranymi metodami informatycznymi”, Oficyna Wydawnicza WSM, 2005, nowa wersja w postaci e-booku

Oprócz podstawowego materiału wymaganego na egzaminach zawiera tematy, przykłady i pojęcia wykraczające poza aktualny program. Oczywiście jest, że program może się zmieniać i te tematy mogą być studentom w przyszłości potrzebne. Poza tym podręcznik powinien wykraczać poza podstawowe wymagania, pewne pojęcia nieco dokładniej wyjaśniać, nie unikając i trudniejszych przykładów. Autor głęboko wierzy, że w każdej grupie znajdą się studenci, którzy będą mieli potrzebę lepszego zrozumienia przerabianego materiału i aspirujący do wyższych ocen, oraz studenci, którzy w przyszłości będą zmuszeni stosować w większym stopniu matematykę w swoich dalszych studiach czy pracy zawodowej. Takie trudniejsze fragmenty podręcznika oznaczone są *, choć należy zdać sobie sprawę, że trudność jest pojęciem względnym.

Pojęcia i definicje, których przyswojenie jest niezbędne do studiowania innych fragmentów podręcznika są wyróżnione **tłustym drukiem**. Pozostałe są wyróżnione *kursywą* w celu lepszego zrozumienia danego fragmentu.

Wszystkie pojęcia i metody są ilustrowane przykładami i zadaniami.

Zadania składają się przeważnie z kilku punktów. Zwykle jeden - dwa z nich mają przykładowe rozwiązania, aby czytelnikowi było łatwiej rozwiązać pozostałe i zredagować rozwiązanie.

Koniec rozwiązania przykładu bądź zadania oznaczony jest symbolem $\square$.

Czytelnikom, którzy chcieliby znaleźć zadania i zagadnienia podobne do zamieszczonych w podręczniku można polecić następujące pozycje: J. Kłopotowski, W. Marcinkowska-Lewandowska, M. Nykowska, I. Nykowski *Matematyka dla studiów ekonomicznych zaocznych i wieczorowych*, Oficyna Wydawnicza SGH, 1999; T. Bażańska, M. Nykowska, *Zbiór zadań z matematyki dla studentów wyższych uczelni ekonomicznych*, Kwantum, 1997; H. Klepacz, E. Porazińska, *Wprowadzenie do zastosowań matematyki w ekonomii, przykłady i zadania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 1996.

Natomiast tym czytelnikom, którzy chcą pogłębić swoją wiedzę z zastosowań matematyki w ekonomii polecamy monografię: A. C. Chiang, *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, 1994.

Jan Rusinek, lipiec 2011

Rozdział 1.

Elementy rachunku zdań i algebry zbiorów

1.1. Zdania

Przez α, β będziemy oznaczać zdania. Każdemu zdaniu możemy przyporządkować **wartość logiczną** 1, gdy jest prawdziwe oraz wartość logiczną 0, gdy jest fałszywe. Oznaczmy wartość logiczną zdania α przez $L(\alpha)$.

PRZYKŁAD 1.1. Jeśli α jest zdaniem „*mucha jest owadem*”, a β zdaniem „ $2 + 2 = 5$ ”, to $L(\alpha) = 1$, $L(\beta) = 0$. $\square$

Ze zdań możemy tworzyć zdania złożone przy pomocy następujących znaków, zwanych **operacjami logicznymi**:

α'	czytamy	<i>nieprawda, że α</i>	zaprzeczenie
$\alpha \wedge \beta$	...	α i β	koniunkcja
$\alpha \vee \beta$	...	α lub β	alternatywa
$\alpha \Rightarrow \beta$	...	<i>jeśli α, to β</i>	implikacja
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	...	α wtedy i tylko wtedy gdy β	równoważność

Dla implikacji w języku polskim stosuje się też inne sformułowania:

„jeżeli α , to β ”
 „z α wynika β ”
 „ α , więc β ”
 „ponieważ α , β ”
 „ β , gdyż α ”
 „ β , bo α ”
 „ β , bowiem α ”

oraz nieco archaiczne

„ α pociągga β ”

Również koniunkcję możemy wyrażać w różny sposób. Możemy spójnik „i” zastąpić spójnikiem „oraz”. Rolę koniunkcji pełni też zapisanie zdań zakończonych kropkami obok siebie. Oczywiście jest, że tą samą informację przekazują sformułowania:

Jest zimno i pada deszcz.
Jest zimno oraz pada deszcz.
Jest zimno. Pada deszcz.

W tabelkach widzimy wartości logiczne zdań złożonych w zależności od wartości logicznych zdań α i β .

α	α'
1	0
0	1

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

PRZYKŁAD 1.2. Niech α oznacza zdanie „Warszawa jest stolicą Polski”, a β zdanie „ $\sqrt{2} > 3$ ”. Skonstruuj zdania α' , β' , $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\beta \Rightarrow \alpha$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$ i ustal ich wartość logiczną.

Rozwiązanie.

α' : *nieprawda, że Warszawa jest stolicą Polski*,
 β' : $\sqrt{2} \leq 3$,
 $\alpha \wedge \beta$: *Warszawa jest stolicą Polski i $\sqrt{2} > 3$* ,
 $\alpha \vee \beta$: *Warszawa jest stolicą Polski lub $\sqrt{2} > 3$* ,
 $\alpha \Rightarrow \beta$: *Jeśli Warszawa jest stolicą Polski, to $\sqrt{2} > 3$* ,
 $\beta \Rightarrow \alpha$: *Jeśli $\sqrt{2} > 3$, to Warszawa jest stolicą Polski*,
 $\alpha \Leftrightarrow \beta$: *Warszawa jest stolicą Polski wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{2} > 3$* .

Oczywiście $L(\alpha) = 1$, $L(\beta) = 0$. Wykorzystując tabelki otrzymujemy:

$L(\alpha') = 0$,
 $L(\beta') = 1$,
 $L(\alpha \wedge \beta) = 0$,
 $L(\alpha \vee \beta) = 1$,
 $L(\alpha \Rightarrow \beta) = 0$,
 $L(\beta \Rightarrow \alpha) = 1$,
 $L(\alpha \Leftrightarrow \beta) = 0$. $\square$

Jeśli ktoś powie zdanie: *Jestem wysoki i gruby*, to zastanówmy się kiedy „złapiemy go na kłamstwie”. Otóż wtedy, gdy okaże się, że nie jest on albo wysoki albo gruby. Jeśli więc jako α oznaczymy zdanie *jestem wysoki*, a jako zdanie β , *jestem gruby*, to intuicja podpowiada nam następującą regułę:

$$(1.1) \quad (\alpha \wedge \beta)' \Leftrightarrow \alpha' \vee \beta'.$$

Podobne rozumowanie doprowadzi i do drugiej reguły:

$$(1.2) \quad (\alpha \vee \beta)' \Leftrightarrow \alpha' \wedge \beta'.$$

Powyższe reguły noszą nazwę **praw de Morgana**. Oczywiście można je było formalnie wyprowadzić wykorzystując podane tabelki.

A oto jak wyglądają inne zaprzeczenia zdań złożonych:

$$(1.3) \quad (\alpha')' \Leftrightarrow \alpha;$$

$$(1.4) \quad (\alpha \Rightarrow \beta)' \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta'.$$

Warto podać jeszcze jedną bardzo ważną regułę:

$$(1.5) \quad (\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\beta' \Rightarrow \alpha').$$

Jest to tak zwana zasada argumentacji nie wprost. Polega ona na następującym toku wnioskowania:

Chcemy wykazać jakąś tezę β . Przyjmujemy za α całą dotychczasową wiedzę. Przypuszczamy, że zdanie β jest fałszywe, czyli, że β' jest prawdziwe. Następnie pokazujemy, że z β' wynika sprzeczność, to znaczy jakiś fałsz w dotychczasowej wiedzy. Ale na mocy prawa de Morgana wynika stąd, że α jest fałszywe. Pokazaliśmy więc $\beta' \Rightarrow \alpha'$, co z zasady argumentacji nie wprost jest równoważne temu, że z całej dotychczasowej wiedzy wynika β .

Reguły logiczne, czyli zdania zawsze prawdziwe nazywa się też **tautologiami**. Na przykład tautologiami są zdania (1.1) – (1.5).

1.2. Kwantyfikatory

Popatrzmy na poniższe zdanie:

Dla każdej liczby dodatniej a istnieje liczba ujemna b taka, że $b^2 = a$.

W zdaniu tym występują dwa zwroty niezwykle często używane przy okazji różnych zdań w matematyce (i nie tylko w matematyce): **dla każdego** (*elementu jakiegoś zbioru*) i **istnieje** (*element jakiegoś zbioru*). Zwroty te są tak ważne, że wprowadza się dla nich specjalne oznaczenia zwane **kwantifikatorami**. Mają one postać:

$$\bigwedge_{x \in A} \text{ czytamy } \text{ dla każdego } x \text{ ze zbioru } A,$$

$$\bigvee_{x \in A} \text{ czytamy } \text{ istnieje } x \text{ ze zbioru } A.$$

Stosuje się również inne oznaczenia kwantyfikatorów, a mianowicie $\forall$ – zamiast $\bigwedge$ oraz $\exists$ – zamiast $\bigvee$.

PRZYKŁAD 1.3. Zapiszemy przy pomocy kwantyfikatorów zdanie „Wszyscy studenci z grupy D1 zdali egzamin z matematyki”.

Oznaczmy przez $\alpha(x)$ zdanie „ x zdał egzamin z matematyki”. Wówczas nasze zdanie zapiszemy tak:

$$\bigwedge_{x \in D1} \alpha(x). \quad \square$$

Kwantyfikatory pozwalają zapisywać zdania w sposób skrótowy. Pomagają też tworzyć szybko zaprzeczenia bardziej skomplikowanych zdań.

Zaprzeczenia zdań z użyciem kwantyfikatorów wyglądają bowiem następująco:

$$(1.6) \quad \left(\bigwedge_{x \in A} \alpha(x) \right)' \Leftrightarrow \bigvee_{x \in A} (\alpha(x))',$$

$$(1.7) \quad \left(\bigvee_{x \in A} \alpha(x) \right)' \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in A} (\alpha(x))'.$$

Powyższe równoważności też noszą nazwę **praw de Morgana**.

PRZYKŁAD 1.4. Zapiszmy przy pomocy kwantyfikatorów zdanie (nieprawdziwe!):

Każda liczba rzeczywista ma pierwiastek.

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} y^2 = x.$$

A oto uzyskane natychmiast jego zaprzeczenie:

$$\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}} y^2 \neq x. \quad \square$$

Jako ciekawostkę podajmy, że jest to też duże udogodnienie przy pisaniu takich tekstów, jak powyższy, przy pomocy komputera. Otóż nie trzeba przepisywać jeszcze raz zdania będącego zaprzeczeniem; kopiujemy tylko zdanie wyjściowe a następnie zamieniamy kwantyfikatory na przeciwne i znak równości na znak nierówności.

ZADANIA

1.1. Niech α będzie zdaniem $3 \cdot 4 = 11$, zaś β zdaniem $17 < \sqrt{262}$. Ustalić wartość logiczną zdań: a) $\alpha' \wedge \beta$; b) $\alpha \vee \beta'$; c) $\beta' \Rightarrow \alpha$; d) $\alpha' \Leftrightarrow \beta$.

1.2. Sprawdzić czy poniższe zdania są tautologiami:

- a) $(\alpha' \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$; b) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \alpha' \vee \beta$;
 c) $(\alpha' \wedge \beta)' \Rightarrow \beta'$; d) $(\alpha' \wedge \beta)' \Leftrightarrow \beta' \vee \alpha$.

1.3. Napisać przy pomocy kwantyfikatorów stwierdzenia:

- a) *każda liczba rzeczywista dodatnia ma pierwiastek drugiego stopnia*;
 b) *każda liczba rzeczywista dodatnia ma pierwiastek dowolnego stopnia*;
 c) *każde równanie liniowe ma rozwiązanie*;
 d) *nie każde równanie kwadratowe ma rozwiązanie*.

Rozwiązanie.

a) $\bigwedge_{x>0} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} x = y^2.$

b) $\bigwedge_{x>0} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} x = y^n. \quad \square$

1.4. Napisać zaprzeczenie następujących zdań:

- a) $(x^2 \geq 5) \wedge (x < 3 \Rightarrow x^3 \leq 7)$;
 b) $(x < y + 3) \Rightarrow (x^2 < y^3 \vee x > y)$;
 c) $(x = a \vee x = b) \wedge (x < a^2 \Rightarrow x > b^2)$.
 d) $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} k > n + m,$
 e) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} x = \frac{n+m}{3},$
 f) $\bigvee_{x>1} \bigwedge_{y<x} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} (x < y^2) \vee (x = y^m).$

1.3. Zbiory

Pojęcie zbioru pojawiło się w matematyce stosunkowo późno – po roku 1850. Nie będziemy tu zajmować się teorią matematyczną związaną ze zbiorami (tzw. „teoria mnogości”), podamy tylko najprostsze operacje na zbiorach i przede wszystkim poznamy sposoby określania zbiorów.

Sposoby określania zbiorów:

1. Wypisanie elementów zbioru w nawiasach klamrowych: np. $\{1, 2, 5\}$ oznacza zbiór złożony z trzech liczb 1, 2 i 5. Taki sposób stosujemy nie tylko w przypadku zbiorów skończonych, ale często i dla zbiorów nieskończonych. Na przykład zapis $\{1, 3, 5, \dots\}$ oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb nieparzystych.

2. Jednoznaczne stwierdzenie, jakim sposobem z pewnego większego zbioru wyróżnia się jego niektóre elementy. Ma to postać:

$$B = \{x \in A : \alpha(x)\}.$$

Oznacza to, że do zbioru B należą te elementy x ze zbioru A , dla których prawdziwe jest zdanie $\alpha(x)$.

PRZYKŁAD 1.5. Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ oznacza zbiór liczb dodatnich, a zbiór $\left\{n \in \mathbb{N} : \bigvee_{m \in \mathbb{N}} n = 3m\right\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3. $\square$

3. Niektóre ważne zbiory mają swoje tradycyjne oznaczenia – jakby „imiona własne”, np. $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}^2$ – płaszczyzna, $\emptyset$ – zbiór pusty, $[a; b]$ lub $\langle a; b \rangle$ – przedział z końcami o lewym końcu a i prawym b , $(a; b)$ – analogiczny przedział bez końców.

Podstawowe działania na zbiorach to **suma mnogościowa** (znak $\cup$), **iloczyn mnogościowy** (znak $\cap$) i **różnica mnogościowa** (znak $\setminus$ lub $-$).

Niech A , B i C oznaczają zbiory.

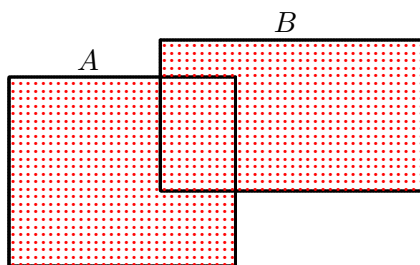
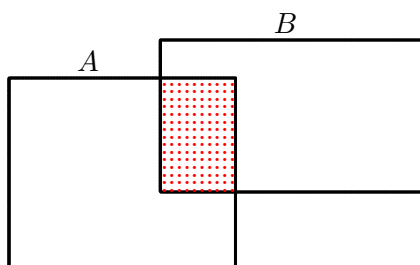
Zbiór $A \cup B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B .

PRZYKŁAD 1.6. Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$. Wówczas $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $\square$

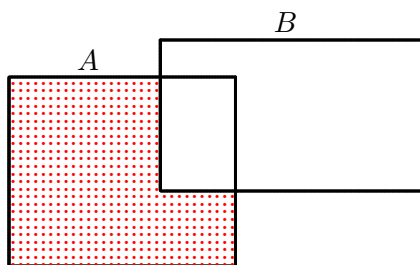
Zbiór $A \cap B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A i do zbioru B .

PRZYKŁAD 1.7. Niech $A = (-1; 4]$, $B = (2; 8)$. Wtedy $A \cap B = (2; 4]$. $\square$

Zbiór $A \setminus B$ składa się z tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B .

Rysunek 1.1. Suma zbiorów $A \cup B$ Rysunek 1.2. Iloczyn zbiorów: $A \cap B$

PRZYKŁAD 1.8. Niech $A = (-2; 5)$, $B = [0; 6]$. Wówczas $A \setminus B = (-2; 0)$, zaś $B \setminus A = [5; 6]$. $\square$

Rysunek 1.3. Różnica zbiorów: $A \setminus B$

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. *Iloczynem kartezjańskim* zbiorów A i B nazywamy zbiór oznaczany $A \times B$ złożony z par (a, b) , gdzie $a \in A, b \in B$.

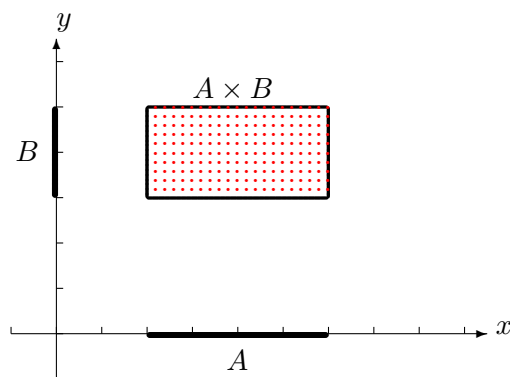
PRZYKŁAD 1.9. Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$. Wtedy

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}. \quad \square$$

Jeśli A ma n elementów, a B ma k elementów, to $A \times B$ ma nk elementów.

Najczęściej używanym iloczynem kartezjańskim jest $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, który utożsamiamy z płaszczyzną dwuwymiarową oznaczaną $\mathbb{R}^2$. Zatem jeśli A i B są podzbiórmi $\mathbb{R}$, to $A \times B$ możemy traktować jako podzbiór $\mathbb{R}^2$.

Sytuację tę ilustruje rysunek 1.4. Na osi Ox zaznaczony jest zbiór A będący przedziałem $[2; 6]$, a na osi Oy zbiór B będący przedziałem $[3; 5]$. Wówczas zbiór $A \times B$ jest prostokątem o wierzchołkach $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(6, 3)$ i $(6, 5)$.



Rysunek 1.4.

ZADANIA

1.11. Zaznaczyć na płaszczyźnie iloczyn kartezjański zbiorów:

- a) $A = \{1, 2, 3\}, B = [0; 1]$;
- b) $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 4\}, B = \{3, 4, 5\}$.

1.12. Zaznaczyć na płaszczyźnie następujące iloczyny kartezjańskie:

- a) $[1; 2] \times [1; 3]$,
- b) $(-2; 2) \times (-2; 2)$,

- c) $[0; 1] \times \{0, 1\}$, d) $\mathbb{R} \times (0; 1)$,
 e) $[0; \infty) \times [0; \infty)$, f) $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$.

1.13. Jakie z poniżej wymienionych zbiorów można przedstawić jako iloczyn kartezjański $A \times B$, gdzie A i B są podzbiorami prostej $\mathbb{R}$? Znaleźć zbiory A i B .

- a) punkt (x_0, y_0) ,
 b) prosta o równaniu $y = 4$,
 c) prosta o równaniu $y = x$,
 d) kwadrat o wierzchołkach w punktach $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.

1.5. Zbiór liczb rzeczywistych

Zbiór liczb rzeczywistych będzie grał kluczową rolę w dalszych rozdziałach. Ma on nie tylko własności zbioru, ale posiada liczne inne własności. Jego elementy, czyli liczby, możemy dodawać, odejmować, mnożyć, dzielić. Możemy je także porównywać, wyznaczać odległość między nimi, ich wartość bezwzględną itp. W związku z tym w zbiorze tym można tworzyć różne wzory przybierające formę równości lub nierówności.

Przypomnijmy kilka ważnych wzorów. Zaczniemy od prostej, ale niezwykle ważnej nierówności zwanej *nierównością trójkąta*. Niech $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(1.10) \quad |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Będziemy tę nierówność wielokrotnie stosować.

Niech $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy $n!$ (czytamy n silnia) jako $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (przyjmujemy dodatkowo $0! = 1$). Liczba $n!$ ma sens kombinatoryczny. Oznacza bowiem na ile sposobów możemy uszeregować zbiór n -elementowy. Innym ważnym symbolem jest **symbol Newtona** $\binom{n}{k}$ ($n \geq k$). Liczba ta jest równa $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. I ta liczba ma sens praktyczny. Mówi nam ona na ile sposobów ze zbioru n -elementowego możemy wybrać zbiór k -elementowy.

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{N}$. **Dwumianem Newtona** nazywamy wzór

$$(1.11) \quad (a + b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots$$

$$+ \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n} a^n b^0.$$

Do zapisywania sumy składającej się z wielu składników często wygodnie jest posługiwać się znakiem $\sum$. Na przykład zapis

$$\sum_{i=1}^n i^2$$

oznacza sumę

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Generalnie zapis

$$\sum_{i=p}^n a_i$$

oznacza sumę liczb $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{n-1}, a_n$.

Przy użyciu znaku $\sum$ dwumian Newtona wygląda następująco:

$$(a+b)^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Przypomnijmy jeszcze następujące wzory znane ze szkoły:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

ZADANIA

1.14. Sprawdzić dwumian Newtona dla $n = 2$ i $n = 3$; zobaczyć w ten sposób, że jest on uogólnieniem znanych ze szkoły wzorów skróconego mnożenia.

1.15. Obliczyć $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.

1.16. Niech $a, b > 0$. Pokazać, że ich średnia arytmetyczna jest nie mniejsza od geometrycznej.

1.17. Zapisać przy pomocy znaku $\sum$ następujące sumy:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n};$

b) $x + (x-1) + (x-2) + \dots + (x-n);$

c) $1 + 3 + 5 + \cdots + 111$;

d) $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{15}$;

e) $x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + \cdots + (2n + 1)x^{2n+1}$.

1.18. Obliczyć:

a) $\sum_{i=1}^4 i^2$; b) $\sum_{j=3}^5 (j^3 - j)$; c) $\sum_{k=1}^6 \frac{1}{k}$.

Rozdział 2.

Funkcje

2.1. Pojęcie funkcji

Niech A i B będą zbiorami. **Funkcją** ze zbioru A w zbiór B nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru A dokładnie jednego elementu zbioru B . Jeśli f oznacza funkcję, to zapisujemy to w następujący sposób:

$$f: A \rightarrow B$$

lub

$$A \ni x \rightarrow f(x) \in B;$$

x nazywamy **argumentem** funkcji, $f(x)$ **wartością** funkcji f w punkcie x .

Dziedziną lub **zbiorem argumentów** funkcji nazywamy zbiór, na którym funkcja jest określona, czyli zbiór A z definicji funkcji. Będziemy oznaczać dziedzinę funkcji f przez D_f .

Często najpierw podaje się postać funkcji przy pomocy pewnego wzoru $f(x)$, a dopiero potem pyta się o jej dziedzinę. Oznacza to, że mamy wyznaczyć wszystkie x -y, dla których wzór ma sens. Np. jeśli napiszemy

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

i pytamy się o dziedzinę tej funkcji, to znaczy pytamy się, kiedy wyrażenie $\sqrt{x-1}$ ma sens. Ma ono sens gdy $x \geq 1$, a zatem dziedziną tej funkcji będzie półprosta $[1; \infty)$.

Zbiór wszystkich y ze zbioru B , dla których istnieje x w dziedzinie funkcji, taki że $f(x) = y$ nazywamy *przeciwdziedziną* funkcji lub *zbiorem wartości* funkcji f i oznaczamy $f(A)$.

PRZYKŁAD 2.1. Każdemu człowiekowi przyporządkowujemy jego płeć. Wtedy zbiór A jest zbiorem złożonym ze wszystkich ludzi a zbiór wartości zbiorem dwuelementowym $\{\text{kobieta}, \text{mężczyzna}\}$. $\square$

PRZYKŁAD 2.2. Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W każdej chwili ma np. prędkość wektorową (lub skalarną). Wtedy czas przebiega zbiór liczb dodatnich (dziedzina), a przeciwdziedzina jest zawarta w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich dla prędkości skalarnej oraz w zbiorze wektorów dla prędkości wektorowej. $\square$

Jak określa się funkcję? Najczęściej spotykane sposoby są następujące:

1. Określa się zbiór A i podaje się wzór przyporządkowujący elementom ze zbioru A wartości f ,
np. $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 1/x$.

2. Jeśli dziedzina funkcji jest zbiorem skończonym, to funkcję bardzo często określa się przy pomocy tabelki. Na przykład poniższa tabelka określa zależność pomiędzy wielkością produkcji i kosztami.

Wielkość produkcji (w tonach)	x	1	2	3	4	5	6
Koszt produkcji (w tys. złotych)	$K(x)$	10	19	28	36	44	52

Dziedziną funkcji jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a zbiorem wartości zbiór $\{10, 19, 28, 36, 44, 52\}$.

3. Funkcja może być określona za pomocą kilku wzorów, które są różne dla różnych podzbiorów zbioru A , np.:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

ZADANIA

2.1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x \cdot (x-1)}$;

b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

2.2. Wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4};$

b) $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2;$

c) $f(x) = x + \frac{4}{x};$

d) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x-1}-1}.$

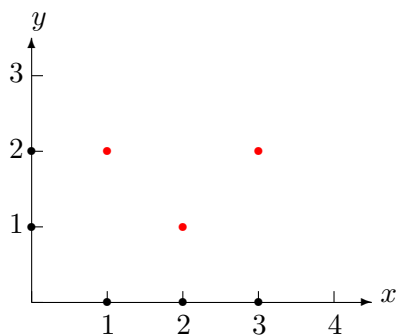
2.2. Wykres funkcji

Wykresem funkcji $f: A \rightarrow B$ nazywamy zbiór $\{(x, f(x)) : x \in A\}$. Widzimy więc, że wykres funkcji jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Jeśli $A \subset \mathbb{R}$ i $B \subset \mathbb{R}$, to wykres funkcji będzie się zawierał w zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, czyli na płaszczyźnie dwuwymiarowej. Możemy więc go przedstawić graficznie.

PRZYKŁAD 2.3. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ i niech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco:

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2.$$

Zaznaczyć wykres funkcji f .



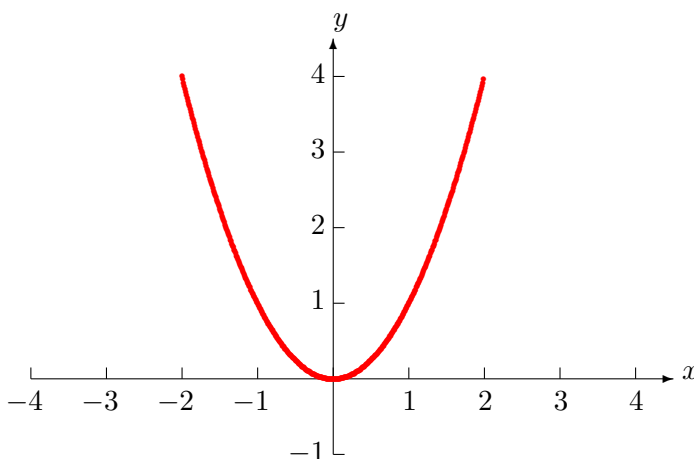
Rysunek 2.1.

Rozwiązanie widzimy na rysunku 2.1. Dziedzina funkcji jest zaznaczona na osi Ox . Zbiór wartości składający się z dwóch punktów jest zbiorem $\{1, 2\}$ i jest zaznaczony na

osi Oy . Wykres funkcji to zbiór trzelementowy składający się z punktów płaszczyzny $(1, 2)$, $(2, 1)$ i $(3, 2)$. $\square$

Często, aby wykres był przydatny i obejmował najważniejsze fragmenty funkcji należy go przeskalować. Oznacza to, że niekoniecznie jednej jednostce długości na wykresie odpowiada jedna jednostka argumentu bądź jedna jednostka wartości.

Na rysunku 2.2. mamy wykres funkcji $f(x) = x^2$. Nie jest on przeskalowany – jedna jednostka x -ów jest taka sama, jak jedna jednostka y -ów i równa 1 cm.



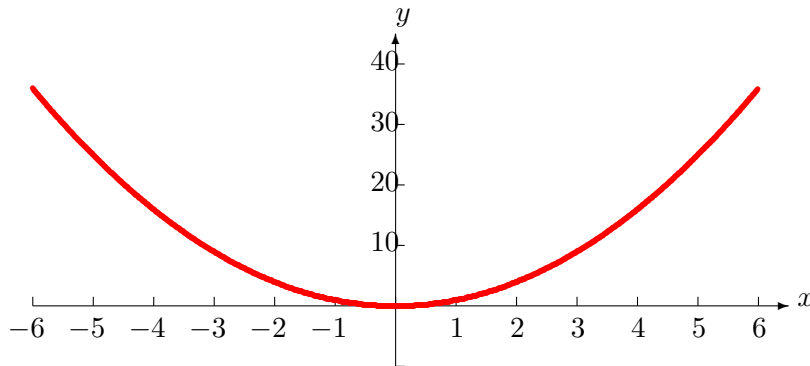
Rysunek 2.2.

Jednak przy takim wyborze jednostek, na rysunku tej wielkości zmieści się tylko wykres dla x z niewielkiego przedziału. Jeśli chcielibyśmy zobaczyć ten wykres na przykład w przedziale $(-6; 6)$, to musielibyśmy przeskalować wykres przyjmując, że długość jednej jednostki na osi Ox odpowiada dużo większej liczbie jednostek na osi Oy . Widzimy to na rysunku 2.3.

Na rysunku tym mamy wykres tej samej funkcji. Obecnie długość jednej jednostki na osi Ox odpowiada dziesięciu jednostkom na osi Oy .

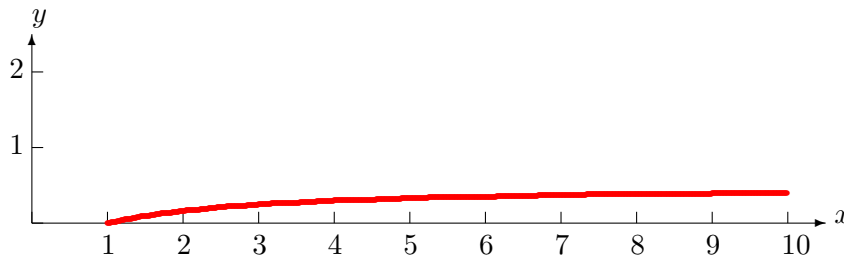
Rozważmy teraz funkcję

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 0.5$$



Rysunek 2.3.

określoną na przedziale $[1; 10]$. Jeśli narysujemy jej wykres bez przeskalowania, to otrzymamy rysunek 2.4.

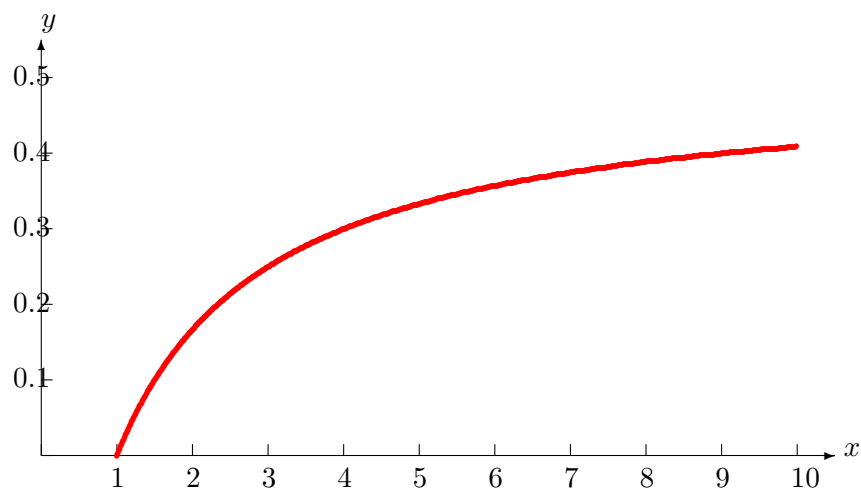


Rysunek 2.4.

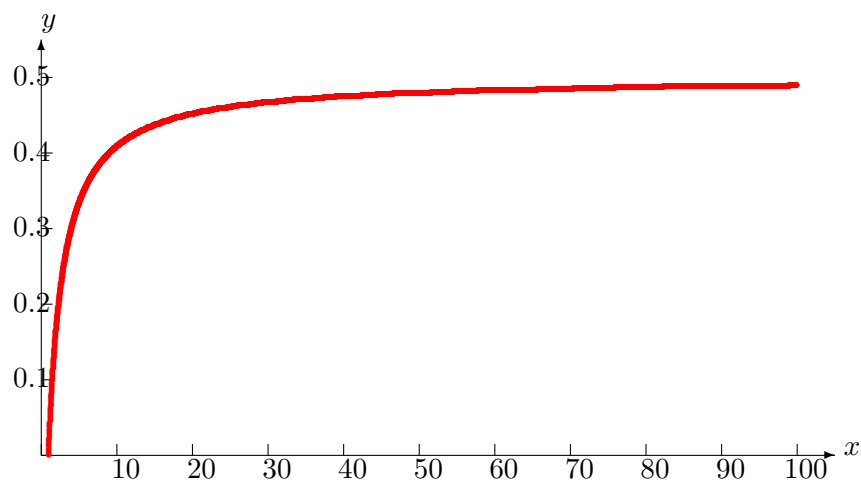
Wykres funkcji na tym rysunku jest zbliżony do linii prostej i niezbyt dokładnie można określać wartości na jego podstawie. Jeśli przeskalujemy wykres przyjmując, że jeden centymetr na osi Oy będzie odpowiadał 0.1 jednostki – otrzymamy obraz dużo dokładniejszy (rysunek 2.5.).

Jeśli chcielibyśmy otrzymać wykres tej samej funkcji w przedziale dużo większym, na przykład $[1; 100]$, to powinniśmy przeskalować i oś Ox . Na rysunku 2.6. mamy wykres tej samej funkcji, przy czym 1 cm na osi Ox odpowiada 10 jednostkom, a 1 cm na osi Oy - 0.1 jednostki.

Niech $A \subset \mathbb{R}$ i niech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją, a x_0 i y_0 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.



Rysunek 2.5.



Rysunek 2.6.

Rozpatrzmy funkcję g zdefiniowaną następująco:

$$g(x) = f(x + x_0) + y_0.$$

Wówczas dziedziną funkcji g jest zbiór $A - x_0 = \{x \in \mathbb{R} : x + x_0 \in A\}$, a wykres funkcji g otrzymujemy poprzez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $(-x_0, y_0)$.

A teraz rozpatrzmy funkcję h_1 zdefiniowaną następująco: $h_1(x) = -f(x)$. Wykres funkcji h_1 jest odbiciem symetrycznym wykresu funkcji f względem osi Ox . Analogicznie wykres funkcji $h_2(x) = f(-x)$ jest odbiciem symetrycznym wykresu funkcji f względem osi Oy .

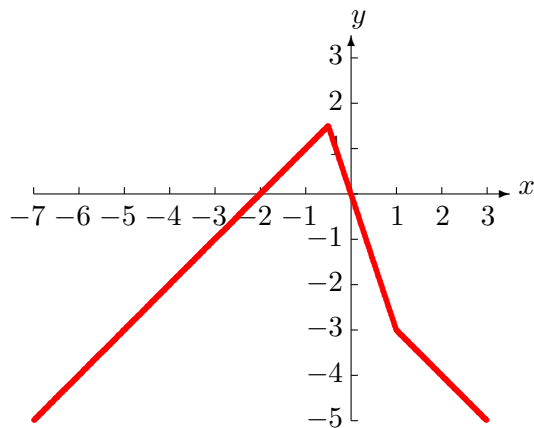
Rozpatrzmy funkcję $h(x) = |f(x)|$. Wykres funkcji h otrzymamy odbijając części wykresu leżące poniżej osi Ox symetrycznie względem tej osi.

PRZYKŁAD 2.4. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = |x - 1| - |2x + 1|$.

Rozwiązanie.

Funkcja f jest liniowa w przedziałach: $(-\infty; -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}; 1]$ i $[1; \infty)$.

Wystarczy więc policzyć wartości funkcji w punktach $-\frac{1}{2}$, 1 i na przykład -2 i 2, a następnie otrzymane w ten sposób punkty wykresu połączyć odcinkami. Mamy $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$, $f(1) = 3$, $f(-2) = 0$, $f(2) = -4$. Wykres wygląda więc następująco (rysunek 2.7.):



Rysunek 2.7. Wykres funkcji $y = |x - 1| - |2x + 1|$ □

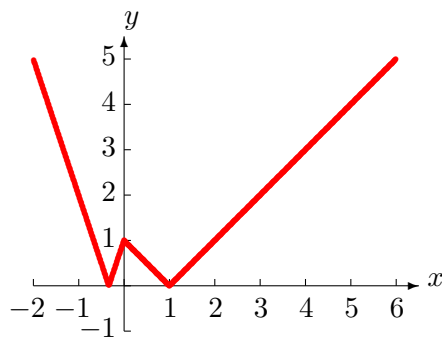
PRZYKŁAD 2.5. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = ||2x| - x - 1|$.

Rozwiązanie.

Najpierw naszkicujemy wykres funkcji $g(x) = |2x| - x - 1$. Funkcja jest liniowa na

odcinkach $(-\infty; 0]$ i $[0; \infty)$. Wystarczy więc obliczyć wartości w trzech punktach: 0 i na przykład -1 i 1 . Mamy $g(0) = -1, g(-1) = 2, g(1) = 0$. Łącząc otrzymane w ten sposób punkty wykresu odpowiednio półprostymi i odcinkami uzyskujemy wykres funkcji g .

Wykres funkcji $||2x| - x - 1|$ otrzymamy odbijając symetrycznie część wykresu funkcji g będącą poniżej osi Ox względem tej osi. A zatem ostatecznie wykres funkcji f wygląda tak jak na rysunku 2.8.



Rysunek 2.8. Wykres funkcji $y = ||2x| - x - 1|$ □

ZADANIA

2.3. Naszkicować wykres funkcji:

- a) $f(x) = |x - 3|$;
- b) $f(x) = |x + 3| - 2$;
- c) $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$;
- d) $f(x) = ||x| + x|$.

2.3. Złożenie funkcji

Niech $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$. **Złożeniem** funkcji f i g nazywamy funkcję oznaczaną $g \circ f$ określoną następująco:

Punktowi $x \in A$ przyporządkowujemy punkt $g(f(x)) \in C$.

Funkcję, która „działa w pierwszej kolejności” (w powyższej sytuacji jest to funkcja f) nazywamy funkcją *wewnętrzną*, a funkcję, która

„działa potem” (w naszej sytuacji jest to funkcja g) nazywamy funkcją *zewnątrzną*.

Dziedziną funkcji $g \circ f$ będzie zbiór takich x z dziedziny funkcji f , że $f(x)$ należy do dziedziny funkcji g .

PRZYKŁAD 2.6. Niech $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x$. Wówczas

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2.$$

Natomiast

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1. \quad \square$$

Często mamy do czynienia z sytuacją odwrotną. Mamy pewną funkcję $h(x)$ „bardziej skomplikowaną” i staramy się ją przedstawić jako złożenie funkcji prostszych.

PRZYKŁAD 2.7. Funkcję $h(x) = 2^{3x+2}$ można przedstawić jako $h = g \circ f$ - złożenie funkcji wewnętrznej $f(x) = 3x + 2$ i zewnętrznej $g(y) = 2^y$. $\square$

ZADANIA

2.4. Pokazać, że $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

2.5. Niech $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + 1$. Obliczyć $f \circ g$ i $g \circ f$.

2.6. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$, $g: [4; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x - 4}$.

a) Sprawdzić czy liczba 5 należy do dziedziny funkcji $g \circ f$. Jeśli tak, to obliczyć $(g \circ f)(5)$.

b) Sprawdzić czy liczba 13 należy do dziedziny funkcji $f \circ g$. Jeśli tak, to obliczyć $(f \circ g)(13)$.

Rozwiązanie.

a) Mamy $D(f) = \mathbb{R}$; $D(g) = [4; \infty)$. Stąd

$$x \in D(g \circ f) \Leftrightarrow x \in D(f) \text{ i } f(x) \in D(g).$$

Zatem

$$f(5) = 73 \in [4; \infty).$$

A więc liczba 5 należy do dziedziny funkcji $g \circ f$. Mamy

$$(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(73) = \sqrt{69}. \quad \square$$

2.7. Niech $f(x) = x^2 - 3x + 4$; $g(x) = x^2 - x$; $h(x) = x + 2$.

Wyznaczyć $f \circ g$, $h \circ f$, $h \circ h \circ g$.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(x^2 - x) = (x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) + 4 = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 4, \\(h \circ f)(x) &= h(x^2 - 3x + 4) = (x^2 - 3x + 4) + 2 = x^2 - 3x + 6, \\(h \circ h \circ g)(x) &= h(h(x^2 - x)) = h(x^2 - x + 2) = x^2 - x + 4. \quad \square\end{aligned}$$

2.8. Niech $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{N}; f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 5; g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; g(n) = n^2$. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $g \circ f$ i $f \circ g$.

2.9. Przedstawić funkcję $h(x)$ daną wzorem:

a) $h(x) = \sqrt{x^2 + 2};$

b) $h(x) = (\sqrt{x} + 1)^3;$

c) $h(x) = 3(x - 1)^4 - 2(x - 1);$

jako złożenie funkcji wewnętrznej f i zewnętrznej g .

2.4. Funkcje różnowartościowe i funkcja odwrotna

Funkcję $f: A \rightarrow B$ nazywamy **różnowartościową**, jeśli

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Jeśli funkcja f jest różnowartościowa, to dla każdego y ze zbioru wartości funkcji f istnieje tylko jeden $x \in A$, taki że $f(x) = y$. To przyporządkowanie każdemu y jednego x -a oznaczamy $x = f^{-1}(y)$, a funkcję f^{-1} nazywamy **funkcją odwrotną do** (albo *względem*) funkcji f .

PRZYKŁAD 2.8. Wykazać, że funkcja $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x-4}}$ określona na przedziale $(4; \infty)$ jest różnowartościowa. Wyznaczyć zbiór wartości tej funkcji i funkcję f^{-1} .

Rozwiązanie.

Przypuśćmy, że $f(x_1) = f(x_2)$ dla $x_1, x_2 > 4$. Oznacza to, że $\sqrt{x_1 - 4} = \sqrt{x_2 - 4}$, a więc $x_1 - 4 = x_2 - 4$ czyli $x_1 = x_2$. Funkcja jest zatem różnowartościowa.

Dalej mamy ciąg równoważnych zdań:

$$x \in (4; \infty)$$

$$x - 4 \in (0; \infty)$$

$$\sqrt{x-4} \in (0; \infty)$$

$$\frac{6}{\sqrt{x-4}} \in (0; \infty).$$

Zatem zbiór wartości funkcji f jest równy $(0; \infty)$. Niech $y = \frac{6}{\sqrt{x-4}}$. Wtedy $y^2 = \frac{36}{x-4}$ i $x = \frac{36 + 4y^2}{y^2}$. Zatem $f^{-1}(y) = \frac{36+4y^2}{y^2}$. $\square$

Takie pokazywanie bezpośrednio z definicji, że funkcja jest różnowartościowa jest niewygodne. Zwykle można to zrobić prościej.

PRZYKŁAD 2.9. Pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ jest różnowartościowa w swojej dziedzinie. Wyznaczyć jej zbiór wartości i podać wzór na funkcję odwrotną.

Rozwiązanie.

Oczywiście $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Rozwiązujemy równanie

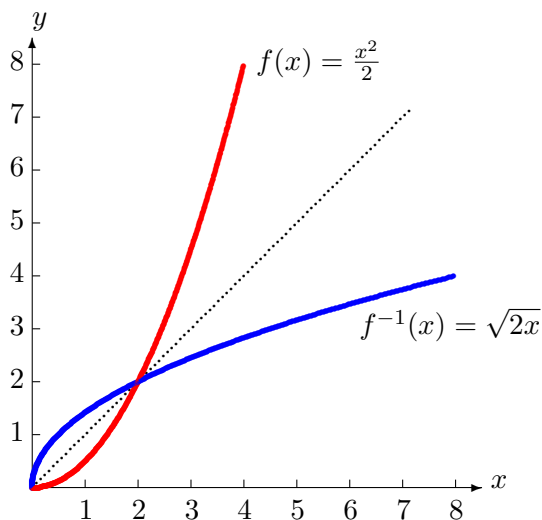
$$y = f(x) = \frac{x-2}{x+1}.$$

Mamy $y(x+1) = x-2$, czyli $x(y-1) = -y-2$. Ma ono rozwiązanie dla $y \neq 1$. Zatem zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Jeśli $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, to x jest jednoznacznie wyznaczone wzorem $x = \frac{-y-2}{y-1}$. Zatem

$$f^{-1}(y) = \frac{-y-2}{y-1}. \quad \square$$

Sposób postępowania jest więc następujący: rozwiązujemy równanie $f(x) = y$ traktując x jako niewiadomą. Zbiór wartości funkcji jest to zbiór tych y -ów, dla których równanie ma rozwiązanie. Funkcja jest różnowartościowa, jeśli dla każdego y ze zbioru wartości istnieje dokładnie jedno rozwiązanie i wzór na to rozwiązanie jest jednocześnie wzorem na funkcję odwrotną.

Zastanówmy się, jak wygląda wykres funkcji odwrotnej. Otóż jeśli jakiś punkt (a, b) należy do wykresu funkcji f , to $f(a) = b$. Zatem $f^{-1}(b) = a$. Do wykresu funkcji odwrotnej należy więc punkt (b, a) . Współrzędne zamieniają się miejscami. Czyli oś Ox przechodzi na oś Oy i na odwrót. Zatem wykres funkcji odwrotnej otrzymujemy odbijając wykres funkcji f symetrycznie względem prostej $y = x$. Na rysunku 2.9. widzimy wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2}$ (określonej na zbiorze $[0; \infty)$) i wykres funkcji odwrotnej $f^{-1}(x) = \sqrt{2x}$ jako symetryczne odbicie wykresu f .



Rysunek 2.9.

ZADANIA

2.10. Wykazać, że funkcja $f: (8; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-8}}$ jest różnowartościowa. Podać wzór na funkcję f^{-1} .

2.11. Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$;

b) $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^4 + 6}$.

2.12. Sprawdzić, czy funkcje dane poniższym wzorem są różnowartościowe. Jeśli tak, to wyznaczyć funkcje odwrotne (pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny):

a) $f(x) = 5x - 6$,

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$,

c) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ (wskazówka: rozpatrz przypadki $x > 0$ i $x \leq 0$),

d) $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

***2.13.** Zbadać czy funkcja $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ jest różnowartościowa. Jeśli jest, to wyznaczyć funkcję odwrotną.

2.5. Funkcje rosnące, malejące, parzyste, nieparzyste

Zajmować się będziemy teraz wyłącznie funkcjami określonymi na zbiorach liczb rzeczywistych i o wartościach rzeczywistych.

Niech $A \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest **rosnąca**, jeśli

$$x > y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Analogicznie powiemy, że funkcja f jest **malejąca**, jeśli

$$x > y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **parzystą**, jeśli

$$f(-x) = f(x)$$

i **nieparzystą** jeśli

$$f(-x) = -f(x).$$

Przykładami funkcji parzystych są funkcje x^2 , x^4 , a nieparzystych x , x^3 .

PRZYKŁAD 2.10. Sprawdzić czy funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

jest rosnąca, malejąca, parzysta, nieparzysta.

Rozwiązanie.

Liczymy $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3/5$, czyli w przedziale $[-1; 0]$ wartość funkcji wzrosła, a w przedziale $[0; 1]$ wartość funkcji zmalała. Nie jest ona zatem ani rosnąca ani malejąca.

Ponieważ $f(1) = 1$, to funkcja nie jest też ani parzysta (bo $f(1) \neq f(-1)$), ani nieparzysta (bo $f(1) \neq -f(-1)$). $\square$

ZADANIA

2.14. Sprawdzić czy poniższe funkcje są rosnące, malejące, parzyste, nieparzyste:

a) $f(x) = x^4 - x^2$;

b) $f(x) = x^3 + x$;

c) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1};$

d) $f(x) = \sin x + \cos x;$

e) $f(x) = e^x + x^2;$

f) $f(x) = \sin x - x^{11}.$

2.15. Pokazać, że jeśli f jest rosnąca (malejąca) i różnowartościowa, to i f^{-1} jest rosnąca (malejąca).

2.6. Funkcje elementarne

Omówimy najważniejsze funkcje występujące w zastosowaniach.

Podstawowymi funkcjami elementarnymi są:

funkcja liniowa $f(x) = ax + b$,

funkcja potęgowa $f(x) = x^\alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$,

funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$,

funkcja sinus $f(x) = \sin x$.

Mając do dyspozycji operacje dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, złożenia i funkcję odwrotną, otrzymujemy z powyższych wszystkie funkcje elementarne. Omówmy niektóre z nich.

Funkcja liniowa. Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Funkcja liniowa jest rosnąca gdy $a > 0$ i malejąca gdy $a < 0$. Gdy $a \neq 0$ funkcja liniowa ma jedno miejsce zerowe w punkcie $x = -b/a$.

Funkcja liniowa opisuje wiele zjawisk.

PRZYKŁAD 2.11. Jedziemy na targ kupić x kilogramów jabłek po a złotych za kilogram. Koszt przejazdu wynosi b złotych. Wówczas funkcja $K(x)$ opisująca koszty zakupu w zależności od x ma postać funkcji liniowej

$$K(x) = ax + b. \quad \square$$

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję postaci

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Wprowadzamy liczbę Δ zwaną wyróżnikiem funkcji kwadratowej

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej wygląda następująco:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Ma ona wierzchołek w punkcie o współrzędnych $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe gdy $\Delta > 0$, jedno miejsce zerowe gdy $\Delta = 0$ i nie ma miejsc zerowych gdy $\Delta < 0$.

PRZYKŁAD 2.12. Mamy zbudować zbiornik z blachy w kształcie sześciangu o krawędzi x metrów. Koszt 1 m² blachy wynosi 90 złotych, a koszt spawania 1 metra bieżącego jest równy 11 złotych. Wyznamy koszt budowy takiego zbiornika.

Zbiornik składa się z pięciu kwadratowych ścian (dno i cztery ściany boczne), każda o powierzchni x^2 m². Zatem koszt materiału wynosi $5 \cdot x^2 \cdot 90$ złotych. Tych pięć ścian trzeba zespawać wzdłuż 8 krawędzi (cztery na dnie i cztery pionowe) długości x m każda. A więc koszt spawania wyniesie $8 \cdot x \cdot 11$ złotych. Koszt całkowity $K(x)$ jest funkcją kwadratową

$$K(x) = 450x^2 + 88x. \quad \square$$

Wielomianem nazywamy funkcję utworzoną z funkcji liniowych przy użyciu operacji dodawania i mnożenia. Wielomian ma postać

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

przy czym zakładamy, że $a_n \neq 0$. Liczbę n nazywamy *stopniem* wielomianu. Dziedziną wielomianu jest zawsze zbiór $\mathbb{R}$. Wielomian stopnia nieparzystego ma zawsze miejsce zerowe (uzasadnienie poznamy później).

PRZYKŁAD 2.13. Z prostokątnego kawałka blachy o krawędziach 70 cm i 90 cm budujemy pudełko w kształcie prostopadłościanu w następujący sposób: na czterech rogach wycinamy kwadraty o krawędzi x , następnie zaginamy i lutujemy blachę. Podaj wzór na objętość powstałego w ten sposób pudełka, w zależności od x . (rysunek 2.10.)

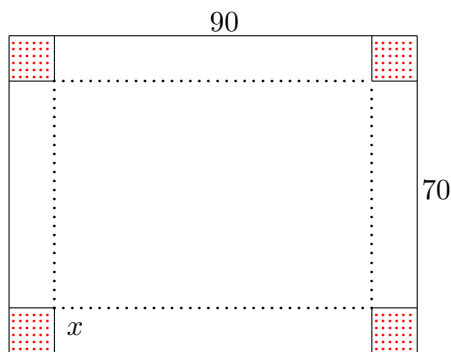
Rozwiązanie.

Podstawa pudełka jest prostokątem o wymiarach $(70 - 2x) \times (90 - 2x)$, a wysokość jest równa x . Zatem objętość $V(x)$ wyraża się wzorem

$$V(x) = (70 - 2x)(90 - 2x)x,$$

co po przekształceniach daje

$$V(x) = 4x^3 - 320x^2 + 6300x.$$



Rysunek 2.10.

Jest to wielomian trzeciego stopnia. $\square$

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów, czyli funkcję $\frac{W(x)}{V(x)}$, gdzie W i V są wielomianami. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór $\{x \in \mathbb{R} : V(x) \neq 0\}$.

PRZYKŁAD 2.14. Z blachy mamy wykonać puszkę w kształcie walca o danej objętości 3 litry. Budujemy ją w ten sposób, że wycinamy dwa koła na górne i dolne denko oraz prostokąt na ścianę boczną i wszystko spawamy. Koszt 1 dm² blachy wynosi 1.5 zł, a koszt spawania 1 dm bieżącego 0.3 zł. Podaj koszt wykonania puszki w zależności od promienia dna.

Rozwiązanie.

Oznaczmy promień dna przez x , a wysokość puszki przez y . Z warunków zadania wynika, że

$$\pi x^2 y = 3.$$

Stąd

$$y = \frac{3}{\pi x^2}.$$

Pole prostokąta potrzebnego na ścianę boczną wynosi

$$2\pi xy = 2\pi x \frac{3}{\pi x^2} = \frac{6}{x},$$

a pola obu denek $2\pi x^2$. Zatem koszt zużytej blachy wyniesie

$$1.5 \cdot \left(2\pi x^2 + \frac{6}{x} \right).$$

Zespawać musimy najpierw ścianę boczną (aby otrzymać „rurkę”) wzdłuż wysokości równej $\frac{3}{\pi x^2}$, a potem przyspawać tę rurkę do obu denek wzdłuż brzegów denek, czyli na długości $2 \cdot 2\pi x$. A więc koszt spawania wyniesie

$$0.3 \cdot \left(\frac{3}{\pi x^2} + 4\pi x \right).$$

Ostatecznie otrzymamy funkcję kosztów $K(x)$ w postaci funkcji wymiernej:

$$K(x) = \frac{3\pi^2 x^4 + 1.2\pi^2 x^3 + 9\pi x + 0.9}{\pi x^2}. \quad \square$$

Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci $f(x) = x^\alpha$. Dziedzina funkcji x^α zależy od α . Np. gdy α jest liczbą całkowitą dodatnią dziedziną jest $\mathbb{R}$, gdy liczbą całkowitą ujemną dziedziną jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdy liczbą niewymierną dziedziną jest zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

PRZYKŁAD 2.15. Budujemy zbiornik z blachy w kształcie prostopadłościanu o wysokości dwa razy większej niż krawędź podstawy. Koszt 1 m² blachy wynosi 100 złotych. Podaj funkcję kosztów jako funkcję zależną od objętości zbiornika.

Rozwiązanie.

Oznaczmy objętość zbiornika przez V , a krawędź podstawy przez a . Wówczas wysokość wynosi $2a$, a objętość $2a^3$. Wyliczając a otrzymujemy

$$a = \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{2}}.$$

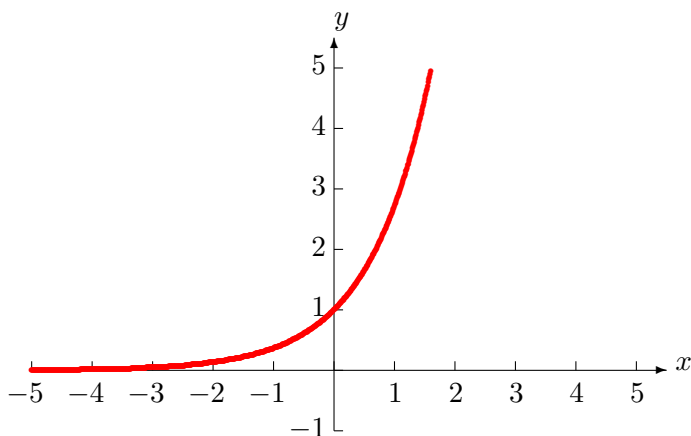
Ilość blachy zużytej do zbudowania zbiornika to dno o powierzchni a^2 i cztery ściany boczne każda o powierzchni $2a^2$. Zatem razem potrzeba blachy

$$a^2 + 8a^2 = 9a^2 = 9 \left(\frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{2}} \right)^2.$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór na $K(V)$ w postaci iloczynu funkcji stałej i funkcji potęgowej

$$K(V) = \frac{900}{\sqrt[3]{4}} \cdot V^{\frac{2}{3}}. \quad \square$$

Funkcja wykładnicza jest to funkcja postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedziną funkcji wykładniczej jest $\mathbb{R}$. Funkcja wykładnicza jest rosnąca gdy $a > 1$ i malejąca gdy $a < 1$. Szczególnie ważną rolę w matematyce (i nie tylko) gra funkcja wykładnicza e^x , gdzie liczba e równa się w przybliżeniu 2.7182.

Rysunek 2.11. Wykres funkcji $y = e^x$

Funkcja wykładnicza opisuje wiele zjawisk. W szczególności zjawiska mające charakter „lawinowy”.

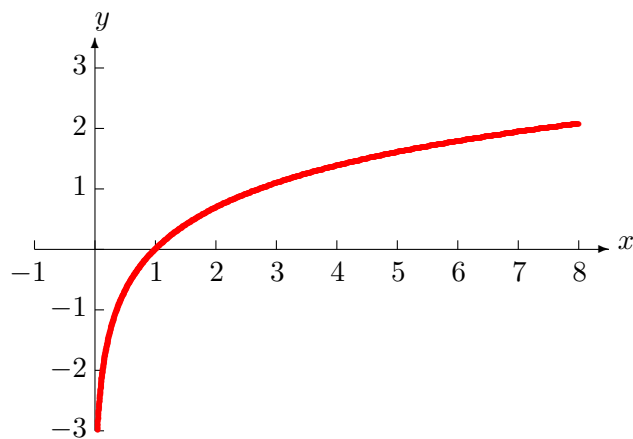
PRZYKŁAD 2.16. Śnieg spadający w górach w postaci lawiny zachowuje się w następujący sposób: w ciągu jednej sekundy każdy kilogram spadającego śniegu potrąca jeden nowy kilogram powodując też jego spадanie. Pokażemy jak przedstawia się funkcja wyrażająca ilość spadającego śniegu w zależności od czasu.

Przypuśćmy, że nieostrożny turysta spowodował spadek jednego kilograma śniegu. Wówczas po sekundzie spada kilogram potrącony przez turystę oraz dodatkowy kilogram potrącony przez spadający śnieg. Zatem po sekundzie spadają dwa kilogramy. Po upływie dwóch sekund spadające dwa kilogramy potrącają nowe dwa kilogramy - razem więc spadają cztery kilogramy, czyli 2^2 kilogramów. Po trzech sekundach cztery spadające kilogramy potrącają nowe cztery kilogramy - spada więc razem $8 = 2^3$ kilogramów. Przypuśćmy, że po czasie t spada 2^t kilogramów. Po upływie kolejnej sekundy, czyli po czasie $t + 1$ spadające 2^t kilogramów potrąca nowe 2^t kilogramów, razem więc spada $2 \cdot 2^t = 2^{t+1}$ kilogramów. Widzimy, że zjawisko to jest opisywane funkcją wykładniczą

$$S(t) = 2^t,$$

gdzie t jest czasem w sekundach, a $S(t)$ ilością spadającego śniegu w kilogramach. $\square$

Funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej a^x nazywamy **funkcją logarytmiczną** $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb dodatnich. Funkcję odwrotną do funkcji e^x nazywamy **logarytmem naturalnym** i oznaczamy $\ln x$.

Rysunek 2.12. Wykres funkcji $y = \ln x$

Wystarczy dobrze znać jedną funkcję wykładniczą i jedną funkcję logarytmiczną, aby móc badać wszystkie inne. Niech bowiem $a, b > 0$. Wówczas ze wzoru $b = a^{\log_a b}$ mamy

$$(2.1) \quad b^x = a^{\log_a b \cdot x}.$$

Zatem funkcja wykładnicza $h(x) = b^x$ jest złożeniem funkcji liniowej $f(x) = \log_a b \cdot x$ (funkcja wewnętrzna) oraz funkcji wykładniczej $g(y) = a^y$ (funkcja zewnętrzna).

W szczególności gdy $a = e$ otrzymujemy

$$b^x = e^{\ln b \cdot x}.$$

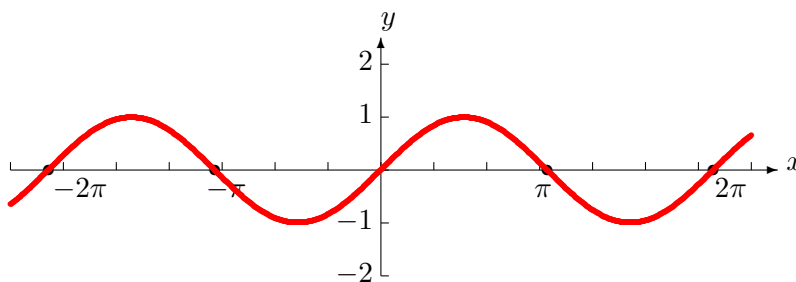
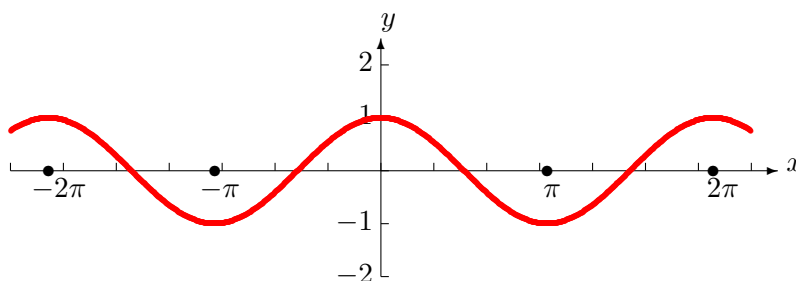
Podobną sytuację mamy w przypadku logarytmów. Mamy mianowicie wzór

$$(2.2) \quad \log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}.$$

Zatem funkcja $\log_b x$ jest iloczynem funkcji $\log_c x$ i funkcji stałej $\frac{1}{\log_c b}$.

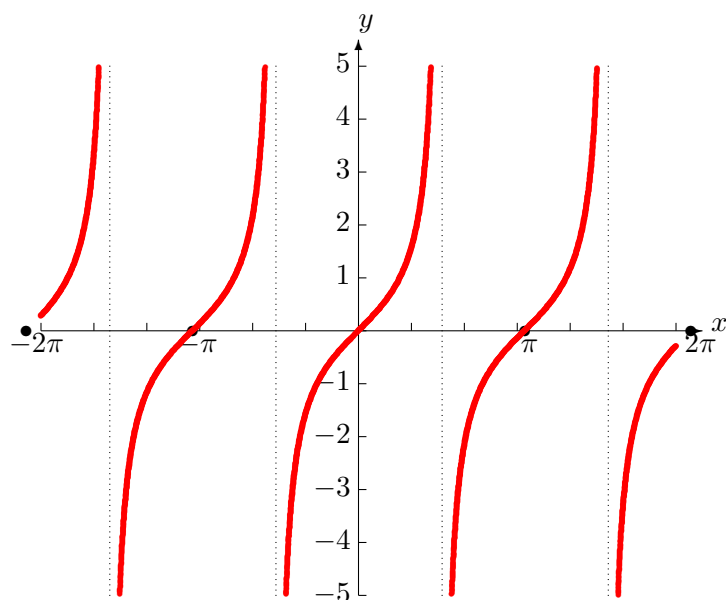
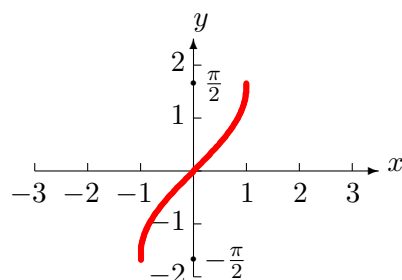
W szczególności wstawiając $c = e$ mamy

$$(2.3) \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}.$$

Rysunek 2.13. Wykres funkcji $y = \sin x$ Rysunek 2.14. Wykres funkcji $y = \cos x$

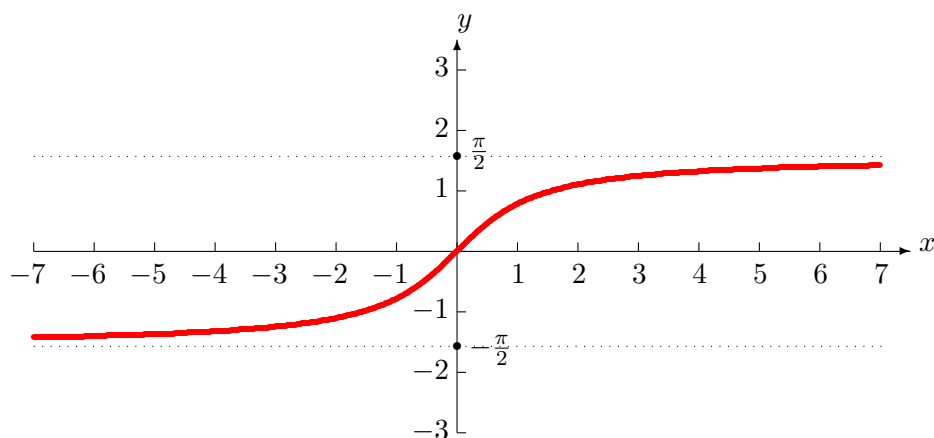
Funkcje trygonometryczne. Tą nazwą określamy funkcje $\sin(x)$, $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$, $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ i $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Funkcje te są tzw. funkcjami *okresowymi*. Mianowicie okresem funkcji $\sin$ i $\cos$ jest liczba 2π (to znaczy, że $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ i $\cos(x + 2\pi) = \cos x$), a okresem funkcji tg i ctg jest liczba π (to znaczy $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$). Dziedzina funkcji $\sin$ i $\cos$ jest zbiór $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości przedział $[-1; 1]$. Dziedzina funkcji tg jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ a funkcji ctg zbiór $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Zbiorem wartości funkcji tg i ctg zbiór $\mathbb{R}$.

Funkcja sinus nie jest funkcją różnowartościową w $\mathbb{R}$. Jest natomiast funkcją różnowartościową w przedziale $[-\pi/2; \pi/2]$ i przekształca go w przedział $[-1; 1]$. Istnieje więc funkcja odwrotna, oznaczana **arcsin**, przekształcająca przedział $[-1; 1]$ w przedział $[-\pi/2; \pi/2]$. Analogicznie funkcja $\cos$ jest różnowartościowa w przedziale $[0; \pi]$ i przekształca go w prze-

Rysunek 2.15. Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ Rysunek 2.16. Wykres funkcji $y = \arcsin x$

dział $[-1; 1]$. Istnieje więc funkcja odwrotna, oznaczana **arccos**, przekształcająca przedział $[-1; 1]$ w przedział $[0; \pi]$.

Podobnie funkcja tg nie jest różnowartościowa w swojej dziedzinie, ale jest różnowartościowa w przedziale (otwartym!) $(-\pi/2; \pi/2)$ i przekształca ten przedział w $\mathbb{R}$. Zatem funkcja odwrotna **arctg** przekształca $\mathbb{R}$ w przedział $(-\pi/2; \pi/2)$. Analogicznie funkcja **arccotg** przekształca $\mathbb{R}$ w przedział $(0; \pi)$.

Rysunek 2.17. Wykres funkcji $y = \arctg x$

Funkcje trygonometryczne opisują zjawiska mające charakter cykliczny, powtarzający się.

Na rysunkach widzimy wykresy kilku podstawowych funkcji.

ZADANIA

2.16. Które spośród funkcji, mających wykresy przedstawione powyżej są rosnące, malejące, parzyste, nieparzyste?

2.17. Naszkicować wykresy funkcji:

- a) $f(x) = \ln(x - 1)$;
- b) $g(x) = e^x + 1$;
- c) $h(x) = \sin(2x)$.

2.7. Równania równowagi

Przez równowagę gospodarczą rozumie się „wzajemną zgodność wielkości ekonomicznych: produkcji, popytu, cen dochodów, itp.”¹.

Szczególną równowagą jest równowaga rynkowa. Jest to taka sytuacja, w której wielkość popytu odpowiada wielkości podaży.

¹Encyklopedia Popularna PWN, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993.

Na początku zajmiemy się sytuacją, w której funkcje podaży i popytu są liniowe. W modelu tym rozważamy wielkości:

- x - cena (zmienna niezależna),
- P - podaż,
- Q - popyt.

Zakładamy, że funkcje $P(x)$ i $Q(x)$ są funkcjami liniowymi, to znaczy

$$\begin{aligned}P(x) &= a + bx, \\Q(x) &= c + dx.\end{aligned}$$

Z faktu, że P i Q mają opisywać podaż i popyt wynikają pewne naturalne warunki na stałe a , b , c i d .

Im większa cena, tym więcej towaru producent stara się sprzedać. Zatem $b > 0$.

Jasne jest też, że producent zaczyna dostarczać towar na rynek, jeśli jego cena przekroczy pewną dolną granicę opłacalności - oznaczmy ją przez x_0 . Funkcja podaży w punkcie x_0 przyjmuje wartość 0. Oznacza to, że $0 = a + bx_0$. Stąd $a < 0$.

Częścią składową popytu jest popyt stały c , niezależny od ceny. Jeśli np. mamy do czynienia z towarem niezbędnym dla funkcjonowania pewnych odbiorców, to kupią go oni niezależnie od ceny. Stąd stała $c \geq 0$. Wreszcie jasne jest, że popyt będzie malał wraz ze wzrostem ceny. Stąd $d < 0$.

Równanie równowagi rynkowej przybiera postać:

$$a + bx = c + dx.$$

Rozwiązując je otrzymamy cenę równowagi:

$$x = \frac{c - a}{b - d}.$$

Równanie zawsze ma dodatnie rozwiązanie, bo $c - a > 0$ oraz $b - d > 0$.

Teraz rozpatrzmy sytuację, kiedy funkcja popytu nie jest liniowa, a kwadratowa. Przybiera ona postać:

$$Q(x) = c + dx^2,$$

gdzie podobnie jak poprzednio $c > 0$ i $d < 0$.

Obrazuje to sytuację, kiedy konsumenci w większym stopniu uzależniają decyzję o zakupie towarów od ceny. Równanie równowagi rynkowej ma wtedy postać:

$$a + bx = c + dx^2.$$

Przenosząc wszystko na lewą stronę otrzymujemy następujące równanie kwadratowe:

$$-dx^2 + bx + (a - c) = 0.$$

Rozwiązując je otrzymujemy:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4d(a - c)}}{-2d},$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4d(a - c)}}{-2d}.$$

Z warunków na współczynniki a , b , c i d wynika, że pierwszy pierwiastek jest ujemny, a drugi dodatni. Sens ekonomiczny ma zatem tylko rozwiązanie x_2 i ono daje położenie równowagi.

Zarówno funkcje popytu jak i funkcje podaży mogą być opisywane bardziej skomplikowanymi funkcjami niż funkcje liniowe bądź kwadratowe. Wtedy równanie równowagi prowadzi do trudnych, nie zawsze dających się rozwiązać algebraicznie równań. Możemy jednak takie równania zawsze rozwiązywać z pewną dokładnością. Jak to można zrobić, poznamy w dalszej części podręcznika.

Rozdział 3.

Ciągi

3.1. Pojęcie ciągu

Ciągiem nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych. Wyrazy ciągu oznaczamy zwykle przez a_n, b_n itd., zaś sam ciąg symbolem $(a_n), (b_n) \dots$

Ciąg o wartościach w $\mathbb{R}$ (tzn. taki, że $a_n \in \mathbb{R}$) nazywamy ciągiem liczbowym. Gdy wiadomo, że chodzi o ciąg liczbowy, mówi się po prostu: ciąg.

Ciąg liczbowy nazywamy **ograniczonym** jeśli jego zbiór wartości jest zbiorem ograniczonym. Możemy to zapisać tak: ciąg jest ograniczony gdy

$$\bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < M.$$

Ciąg liczbowy nazywamy **rosnącym (malejącym)**, jeśli

$$a_{n+1} > a_n \quad (a_{n+1} < a_n).$$

Ciąg liczbowy nazywamy **niemalejącym (nierosnącym)**, jeśli

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} \leq a_n).$$

Ciąg nierosnący lub niemalejący nazywamy **monotonicznym**.

W wypadku funkcji będącej *ciągami* mamy możliwość tzw. *rekurencyjnego* definiowania ciągu.

Robi się to w sposób następujący:

Krok 1: Podajemy wartość pierwszego wyrazu ciągu.

Krok 2: Podajemy wzór na $n + 1$ -szy wyraz ciągu w zależności od n -tego wyrazu ciągu.

PRZYKŁAD 3.1. Niech $a_1 = 2$ oraz $a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wyznacz a_4 .

Rozwiązanie.

Mamy

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1^2 - 3a_1 = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2; \\a_3 &= a_2^2 - 3a_2 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) = 10; \\a_4 &= a_3^2 - 3a_3 = 10^2 - 3 \cdot 10 = 70. \quad \square\end{aligned}$$

Wyraz $n + 1$ -szy może zależeć od wielu poprzednich wyrazów ciągu. Wtedy w kroku pierwszym trzeba podać większą liczbę wyrazów.

PRZYKŁAD 3.2. Ciąg (a_n) jest określony następująco: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$ oraz $a_{n+1} = a_{n-2} + a_n - a_{n-1}$ dla $n = 3, 4, 5, \dots$. Wyznacz a_6 .

Rozwiązanie.

Mamy

$$\begin{aligned}a_4 &= a_1 + a_3 - a_2 = 2 + 3 - 1 = 4; \\a_5 &= a_2 + a_4 - a_3 = 1 + 4 - 3 = 2; \\a_6 &= a_3 + a_5 - a_4 = 3 + 2 - 4 = 1. \quad \square\end{aligned}$$

Ważnymi przykładami ciągów są znane ze szkoły ciągi arytmetyczne i geometryczne.

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem *arytmetycznym* jeśli spełnia warunki:

- a_1 jest dowolną liczbą rzeczywistą,
- każdy następny wyraz różni się od poprzedniego o ustaloną liczbę r .

Daje to wzór na n -ty wyraz

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Warto przytoczyć wzór na sumę n pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$(3.1) \quad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = na_1 + \frac{n(n-1)r}{2}.$$

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem *geometrycznym* jeśli spełnia warunki:

- a_1 jest dowolną liczbą rzeczywistą,
- każdy następny wyraz powstaje z poprzedniego poprzez pomnożenie przez ustaloną liczbę $q \neq 1$ (jeśli $q = 1$, to ciąg jest ciągiem stałym).

Daje to wzór na n -ty wyraz

$$a_n = a_1 q^{(n-1)}.$$

Wzór na sumę n pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego jest następujący:

$$(3.2) \quad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Zastosowanie tych ciągów można zilustrować poniższymi ważnymi przykładami.

Oprocentowanie proste. Składamy w banku kwotę K . Co pewien ustalony okres tylko kwota K podlega oprocentowaniu ze stopą procentową p . p . Zatem po pierwszym okresie będziemy dysponować kwotą $K_1 = K + pK = K(1 + p)$. Po drugim okresie będziemy mieli kwotę $K_2 = K_1 + pK = K(1 + 2p)$ i po n okresach kwotę $K_n = K(1 + np)$. Zatem (K_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy pK .

Oprocentowanie składane. Przy tego rodzaju oprocentowaniu na końcu okresu odsetki obliczamy od całej kwoty jaką mieliśmy na początku okresu. I tak po pierwszym okresie będziemy mieli kwotę $K_1 = K + pK = K(1 + p)$, czyli tyle samo co przy oprocentowaniu prostym. Ale po drugim okresie będziemy mieli kwotę $K_2 = K_1 + K_1 p = K(1 + p)^2$, a po n -tym kwotę $K_n = K(1 + p)^n$. Otrzymany w ten sposób ciąg jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $1 + p$.

ZADANIA

3.1. a) Ciąg (a_n) jest zdefiniowany następująco: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wyznacz a_5 .

b) Ciąg (b_n) jest zdefiniowany następująco: $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_{n+1} = b_{n-1}^2 - b_n^3$. Wyznacz a_5 .

c) Ciąg (c_n) jest zdefiniowany następująco: $c_1 = 1$, $c_n = \sum_{k=1}^n c_k$. Wyznacz c_4 .

3.2. Ciągi zbieżne

Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym i niech $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg (a_n) jest zbieżny do a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(3.3) \quad \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > n_0} |a_n - a| < \varepsilon.$$

To, że ciąg (a_n) jest zbieżny do a oznaczamy symbolicznie

$$a_n \rightarrow a$$

lub

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

a liczbę a nazywamy **granicą** ciągu (a_n) .

PRZYKŁAD 3.3. Pokazać bezpośrednio z definicji, że ciąg $a_n = \frac{1}{\log_3 n}$ jest zbieżny do 0.

Rozwiązanie.

Mamy pokazać, że

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n > n_0} \frac{1}{\log_3 n} < \varepsilon.$$

Ostatnia nierówność jest równoważna nierówności $\log_3 n > 1/\varepsilon$, a ta z kolei nierówności $n > 3^{1/\varepsilon}$. Wystarczy więc wziąć $n_0 > 3^{1/\varepsilon}$. $\square$

Prawdziwy jest fakt:

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

3.3. Podstawowe wzory

Prawdziwe są wzory:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot a_n) &= a \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).\end{aligned}$$

Jeśli dodatkowo założymy, że $b_n \neq 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

3.4. Ciągi rozbieżne do ∞

Mówimy, że ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ ($-\infty$) jeśli

$$\bigwedge_{r>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} a_n > r \quad (a_n < -r).$$

Jeśli ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ ($-\infty$), to ciąg $b_n = 1/a_n$ jest zbieżny do zera.

PRZYKŁAD 3.4. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \sqrt{2n} - \sqrt{2n+3}$.

Rozwiązanie.

$$a_n = \frac{(\sqrt{2n} - \sqrt{2n+3})(\sqrt{2n} + \sqrt{2n+3})}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n+3}} = \frac{-3}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n+3}}.$$

Ponieważ mianownik dąży do ∞ , to a_n dąży do 0. $\square$

ZADANIA

3.2. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \frac{n^2 - 2 - \frac{1}{n}}{(2n-5)^2};$

b) $b_n = \frac{(2n-3)^4}{(n+5)(5n^2+4n)(1-3n)};$

c) $c_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{2n+2}};$

d) $d_n = \frac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt{5n^2+3}}.$

3.5. Twierdzenie o trzech ciągach

Bardzo przydatnym narzędziem służącym do liczenia granic ciągów jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE (o trzech ciągach). *Niech (a_n) , (b_n) , (c_n) będą ciągami liczbowymi spełniającymi założenia:*

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

Wówczas granica ciągu (b_n) też jest równa a .

PRZYKŁAD 3.5. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \frac{\cos 9n}{n+7}$.

Rozwiązanie.

Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Ponieważ $-1 \leq \cos 9n \leq 1$, to mnożąc te nierówności przez $\frac{1}{n+7}$ otrzymujemy

$$-\frac{1}{n+7} \leq a_n \leq \frac{1}{n+7}.$$

Ponieważ $\frac{1}{n+7} \rightarrow 0$, to i a_n dąży do 0. $\square$

ZADANIA

3.3. Obliczyć granicę ciągu:

a) $a_n = \frac{\sin \sqrt{n^2}}{\sqrt{n}};$

b) $b_n = \frac{n}{2^n};$

c) $c_n = \frac{\log_2 n}{n}.$

3.7. Liczba e i oprocentowanie ciągłe

Zajmiemy się teraz pewnym ważnym ciągiem powstającym w sposób naturalny przy naliczaniu tzw. **oprocentowania ciągłego**. Przypuśćmy, że oprocentowanie wynosi r w skali okresu i bank dzieli cały okres na n równych podokresów i po każdym z nich nalicza oprocentowanie składane. Wówczas stopa procentowa każdego podokresu wynosi r/n i na mocy znanego nam już wzoru na oprocentowanie składane kwota po x -tym podokresie wyniesie

$$K_x = K \left(1 + \frac{r}{n}\right)^x$$

(K jest kwotą początkową złożoną w banku). Przypuśćmy, że dzielimy nasz okres na coraz więcej podokresów. Odpowiada to sytuacji, że n dąży do ∞ . Pytamy się, do czego wówczas dąży K_x (zależne od n). Na początek założmy, że $K = 1$, $r = 1$ i $x = n$. Mamy wówczas ciąg

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Okazuje się, że granicą tego ciągu jest liczba e , poznana już przy okazji wprowadzania funkcji wykładniczej.

Wiedząc o tym możemy teraz przyjąć K , r dowolne, a t niech będzie czasem, po którym chcemy sprawdzić naszą kwotę, mierzonym w jednostce równej długości naszego okresu, np. w latach, miesiącach itd. Wtedy na czas t musimy „zużyć” tn podokresów. Czyli $x = tn$. Podstawmy $n/r = m$. Otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} K_x &= \lim_{n \rightarrow \infty} K \left(1 + \frac{r}{n}\right)^x = \lim_{m \rightarrow \infty} K \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{mx}{r}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} K \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{x}{r}} = \lim_{m \rightarrow \infty} K \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{tr} = Ke^{tr}. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy więc wzór na stan konta po okresie t przy oprocentowaniu ciągłym przy stopie procentowej r :

$$(3.4) \quad K(t) = Ke^{rt}.$$

ZADANIA

3.7. Zbadać, czy istnieje granica poniższych ciągów i wyznaczyć ją:

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) $\frac{10000+n}{n}$; | b) $(1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n})$; |
| c) $\sqrt[n]{\frac{1}{1000000}}$; | d) $\frac{2^n}{n!}$; |
| e) $\frac{1000000^n}{n!}$; | f) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; |
| g) $\sqrt{n^2+n} - n$; | h) $\sqrt[3]{n^2+2n} - \sqrt[3]{n^2}$; |
| i) $\frac{n^3-n^2+5}{3n^3-7n+8}$; | j) $\frac{n^3-n^2+5}{3n^4-7n+8}$; |
| k) $\cos 3n$; | l) $(-1)^n \frac{n+1}{n}$; |
| m) $(\frac{n+2}{n})^n$; | n) $(\frac{n-5}{n})^n$. |

3.8. Stosując twierdzenie o trzech ciągach znaleźć granicę ciągów:

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------|
| a) $\sqrt[n]{4^n + 3^n}$; | b) $\sqrt[n]{3^n + 8n}$; |
| c) $\sin n \cdot \sin \frac{1}{n}$; | d) $\frac{\ln n}{n^2}$. |

Rozdział 4.

Funkcje ciągłe

4.1. Granica funkcji w punkcie

Liczbę a nazywamy **granica funkcji f w punkcie x_0** , jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 o wyrazach różnych od x_0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

Zapisujemy to symbolicznie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

PRZYKŁAD 4.1. Pokażemy, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

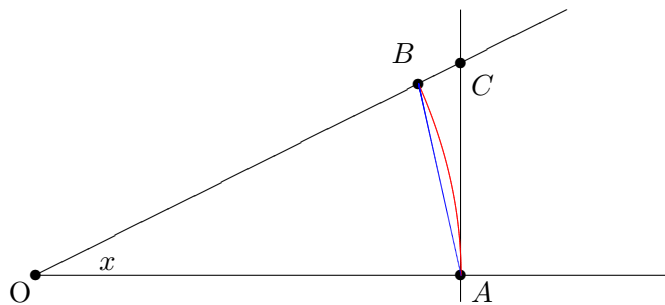
Najpierw udowodnimy następującą nierówność:

$$(4.1) \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

dla $0 < x < \pi/2$.

W tym celu weźmy okrąg o promieniu 1 i środku O , oraz na okręgu punkty A i B , tak aby kąt AOB był mniejszy od $\pi/2$. Oznaczmy ten kąt przez x (rysunek 4.1.).

Poprowadźmy przez punkt A styczną do okręgu. Punkt przecięcia tej stycznej z prostą OB oznaczmy C . Rozpatrzmy trzy figury: trójkąt AOB , wycinek koła AOB i trójkąt AOC . Pole pierwszego jest równe $\sin x/2$, pole drugiego ma się tak do pola całego koła jak x do 2π , zatem jest równe $x/2$, a pole trzeciego jest równe $\operatorname{tg} x/2$.



Rysunek 4.1.

Ponieważ pierwsza figura zawiera się w drugiej, a druga w trzeciej, otrzymujemy żadaną nierówność.

Niech x dąży do 0.

Korzystając z nierówności 4.1 (odwracając ją i dzieląc przez x) mamy

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, korzystając z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy żadaną granicę. $\square$

Tego symbolu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ używamy też dla granic niewłaściwych, tzn. gdy a lub b jest równe $\pm\infty$.

Na przykład $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0$, ale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje, bo dla ciągu x_n dodatniego ta granica jest równa $+\infty$, a dla ujemnego jest równa $-\infty$.

Można w tym wypadku mówić o tzw. *granicy jednostronnej*. Mianowicie, liczbę (lub symbol $\pm\infty$) nazywamy granicą *prawostronną* (*lewostronną*) funkcji f w punkcie x_0 , jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 o wyrazach większych (odpowiednio mniejszych) od x_0 ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

Oznaczamy to odpowiednio

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = b$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b.$$

Jeśli w pewnym punkcie granica prawostronna funkcji jest równa lewostronnej, to funkcja ma w tym punkcie granicę.

ZADANIA

4.1. Obliczyć:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9x}.$$

4.2. Obliczyć $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

Rozwiązanie.

Mnożąc i dzieląc funkcję przez funkcję $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Ponieważ mianownik ostatniego wyrażenia zbiega do ∞ , funkcja dąży w ∞ do 0.

4.3. Obliczyć:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{3x-1}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+7}{(3x-5)^2}; \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2-x}{x^3-1}; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x}. \end{array}$$

Rozwiązanie.

d). Niech $[x]$ oznacza część całkowitą x . Wtedy

$$x \geq [x] > x-1.$$

Oczywiście jak x dąży do ∞ , to i $[x]$ dąży do ∞ . Skorzystamy z dwumianu Newtona. Jeśli zastosujemy dwumian Newtona do sumy $1+1$ i n równego $[x]$, to otrzymamy $n+1$ dodatnich składników. Jest ona większa od trzeciego składnika równego

$$\binom{n}{2} 1^2 \cdot 1^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Zatem

$$2^x \geq 2^{[x]} = (1+1)^{[x]} > \frac{[x] \cdot ([x]-1)}{2}.$$

Stąd

$$\frac{2^x}{x} > \frac{(x-1)(x-2)}{x} = x \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right).$$

Ponieważ prawa strona dąży do ∞ , więc i $\frac{2^x}{x}$ dąży do ∞ gdy $x \rightarrow \infty$. $\square$

4.4. Pokazać, że dla każdego $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = \infty.$$

Rozwiązanie.

Ponieważ $a > 1$, istnieje liczba k , że $a^k \geq 2$. Mamy zatem

$$\frac{a^x}{x} = \frac{a^{k \cdot \frac{1}{k} \cdot x}}{x} \geq \frac{2^{\frac{x}{k}}}{\frac{x}{k} \cdot k}.$$

Podstawiając $\frac{x}{k} = z$ (jeśli $x \rightarrow \infty$, to i $z \rightarrow \infty$) mamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} \geq \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2^z}{z} \cdot \frac{1}{k}.$$

Z poprzedniego zadania prawa strona dąży do ∞ zatem i nasza granica jest równa ∞ . $\square$

4.5. Udowodnić, że dla $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{a^x} = 0$$

(wskazówka: zapisać a jako $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$ i skorzystać z zadania poprzedniego).

4.6. Udowodnić, że dla każdego $p \in \mathbb{N}$ i $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = \infty.$$

Wyniki powyższych zadań warto zapisać w postaci jednego ważnego wniosku:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{W(x)}{a^x} = 0,}$$

jeśli W jest dowolnym wielomianem i a jest liczbą większą od 1.

ZADANIA

4.7. Obliczyć granice:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 2x)(5 - 4x^2)}{x^4 - 7x + 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x};$

- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$.

4.2. Ciągłość funkcji

Niech $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$. (Przypominamy, oznacza to, że funkcja f przekształca przedział $(a; b)$ w zbiór liczb rzeczywistych.)

Niech $x \in (a; b)$.

Mówimy, że funkcja f jest **ciągła** w punkcie x , jeśli

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x).$$

Jeśli funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ i f jest ciągła w każdym punkcie $x \in (a; b)$, to mówimy po prostu, że funkcja f jest ciągła.

PRZYKŁAD 4.2. Sprawdzimy ciągłość funkcji $f(x) = x^2$. Niech $x \in \mathbb{R}$ i niech $y \rightarrow x$. Musimy pokazać, że $y^2 \rightarrow x^2$. Ale to wynika ze znanego nam faktu, że granica iloczynu jest równa iloczynowi granic. $\square$

Przykład ten sugeruje, że ze znanych nam twierdzeń o ciągach możemy otrzymać następujące fakty:

*Suma (różnica) funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą;
 Iloczyn funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą;
 Iloraz funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

Ponadto:

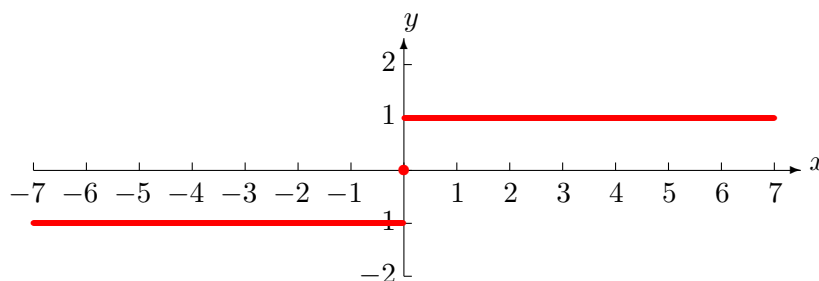
Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

PRZYKŁAD 4.3. Sprawdzimy, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
 $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ nie jest ciągła w punkcie $x = 0$. Funkcja ta przyjmuje wartość 1 dla $x > 0$, wartość 0 dla $x = 0$ i wartość -1 dla $x < 0$.

Musimy pokazać istnienie takiego ciągu (x_n) , że $x_n \rightarrow 0$ oraz $f(x_n)$ nie zbiega do $f(0) = 0$.

Niech $x_n = 1/n$. Mamy $x_n \rightarrow 0$, ale $f(x_n) = 1$ nie zbiega do zera. $\square$

A oto wykres naszej funkcji (rysunek 4.2.):



Rysunek 4.2. Wykres funkcji $y = \operatorname{sgn}(x)$

Widzimy, że wykres funkcji nie jest linią ciągłą. To spostrzeżenie nasuwa nam pewną, wprowadzie niezupełnie ścisłą, ale bardzo obrazową charakterystycję ciągłości:

Funkcja jest ciągła, jeśli jej wykres można narysować bez odrywania ręki.

PRZYKŁAD 4.4. Zbadać ciągłość funkcji $f(x) = \sin x$.

Rozwiązanie.

Skorzystamy z udowodnionej już nierówności

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

dla $x \in (0; \pi/2)$.

Niech $y \rightarrow x$. Musimy zauważyć, że $\sin y \rightarrow \sin x$, czyli że

$$|\sin y - \sin x| \rightarrow 0.$$

Korzystając ze wzoru trygonometrycznego

$$\sin a - \sin b = 2 \cdot \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

i z faktu, że $|\cos x| < 1$ otrzymujemy:

$$|\sin y - \sin x| = 2 \cdot \left| \sin \frac{y-x}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{y+x}{2} \right| \leq 2 \cdot \left| \sin \frac{y-x}{2} \right|.$$

Ponieważ y dąży do x , $|y-x|$ jest mniejsze od $\pi/2$. Wtedy

$$|\sin(y-x)| = \sin|y-x|$$

i możemy skorzystać z udowodnionej nierówności.

Mamy zatem

$$|\sin y - \sin x| \leq 2 \cdot \sin \frac{|y-x|}{2} < |y-x|.$$

A ponieważ y dąży do x , to $|y-x|$ dąży do zera, zatem i $|\sin y - \sin x|$ dąży do 0, a to oznacza, że $\sin y$ dąży do $\sin x$. $\square$

Funkcje ciągłe grają fundamentalną rolę. Funkcja ciągła jest to bowiem taka funkcja, w której *niewielkie zmiany argumentu* prowadzą do *niewielkiej zmiany wartości funkcji*. Pozwala to nam w wypadku gdy zjawisko jest opisane funkcją ciągłą, w miarę płynnie tym zjawiskiem sterować. Niewielka zmiana mocy silnika w samochodzie (np. poprzez dodanie gazu) powoduje tylko niewielki wzrost prędkości (unikamy dzięki temu wypadków), niewielka zmiana cen powoduje niewielką zmianę popytu (i na odwrót), niewielka zmiana stopy procentowej w centralnym banku powoduje niewielką zmianę inflacji itd.

Większość funkcji elementarnych to funkcje ciągłe w swojej dziedzinie. Między innymi *ciągłe są wielomiany, funkcje wymierne, funkcje trygonometryczne, funkcje wykładnicze, funkcje logarytmiczne*.

ZADANIA

4.8. Dla jakiego a ciągła jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x+a & x > 0 \\ x-2 & x \leq 0 \end{cases}.$$

Rozwiązanie.

Funkcja jest na pewno, jako funkcja liniowa, ciągła na zbiorach $(-\infty; 0)$ i $[0; \infty)$. Jeśli przedłużymy funkcję liniową $x+a$ na przedział domknięty $(-\infty; 0]$, to aby była ciągła w zerze musi mieć wartość $0+a = a$. Ale z drugiej strony mamy $f(0) = 0-2 = -2$. Stąd $a = -2$. $\square$

4.9. Dla jakiego a jest ciągła funkcja

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+a & x > 1 \\ x-2 & x \leq 1 \end{cases},$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x > 1 \\ x - 3 & x \leq 1 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > a \\ x + 4 & x \leq a \end{cases} ?$$

4.3. Ciągłość funkcji odwrotnej

Prawdziwe jest

TWIERDZENIE. *Jeśli funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różnowartościowa i ciągła w każdym punkcie $x \in (a; b)$, to funkcja f^{-1} istnieje; jej zbiorem wartości jest pewien przedział (skończony lub nie) $(c; d)$ i funkcja f^{-1} jest ciągła w przedziale $(c; d)$.*

Otrzymujemy z tego twierdzenia m.in. ciągłość funkcji: $\sqrt{x}$ (dla $x > 0$), $\sqrt[n]{x}$ (x dowolne, jeśli n nieparzyste i x dodatnie, jeśli n parzyste), $\arcsin$, $\arccos$, $\arctg$, arcctg i funkcji logarytmicznych.

PRZYKŁAD 4.5. Niech x określa cenę towaru, a funkcja $Q(x)$ opisuje popyt w zależności od ceny. Jeśli Q jest funkcją ciągłą, to oznacza to, że *niewielka* zmiana ceny powoduje *niewielką* zmianę popytu. Ale wiemy, że funkcja odwrotna $x(Q)$ też jest ciągła. Stwierdziliśmy, że nastąpiła niewielka zmiana popytu Q . Wnioskujemy z tego, że zmiana ceny x też była niewielka.

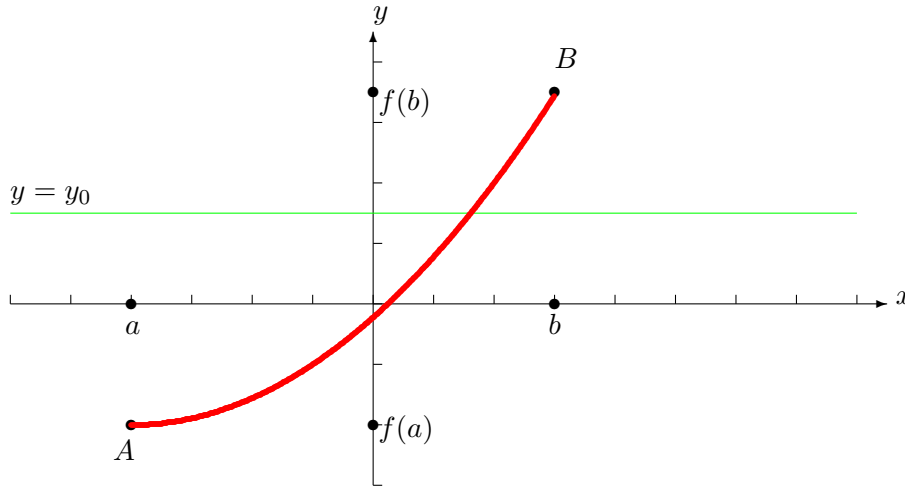
4.4. Własność Darboux funkcji ciągłej

Przytoczymy następującą bardzo ważną własność funkcji ciągłych.

TWIERDZENIE. *Założmy, że funkcja $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i niech $f(a) < y_0 < f(b)$ (lub $f(b) < y_0 < f(a)$). Wówczas istnieje taki punkt $c \in (a; b)$, że $f(c) = y_0$.*

Ta własność funkcji ciągłych, zwana własnością Darboux, jest szczególnie przekonująca, jeśli rozpatrzymy nieścistą, ale obrazową charakteryzację funkcji ciągłych (funkcja jest ciągła gdy jej wykres można narysować bez odrywania ręki - rysunek 4.3.).

Wykres przechodzi przez punkty A i B i jasne jest, że aby przejść z punktu A do B trzeba przeciąć prostą $y = y_0$.



Rysunek 4.3.

PRZYKŁAD 4.6. Pokażemy, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty.

Niech bowiem $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ będzie takim wielomianem (n - liczba nieparzysta i $a_n \neq 0$).

Mamy

$$w(x) = \frac{w(x)}{x^n} \cdot x^n = \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \cdot x^n.$$

Wyrażenie w nawiasie dąży (przy x zbliżonym do plus czy minus ∞) do a_n , a x^n do $+\infty$ jeśli $x \rightarrow \infty$ i do $-\infty$, jeśli $x \rightarrow -\infty$. Zatem funkcja $w(x)$ dąży w $+\infty$ do $+\infty$ i w $-\infty$ do $-\infty$, jeśli $a_n > 0$ i na odwrót, jeśli $a_n < 0$. Znajdziemy więc takie a , że $w(a) < 0$ i takie b , że $w(b) > 0$. Z własności Darboux istnieje więc takie c , że $w(c) = 0$. $\square$

Własność Darboux pozwala nam znajdować w dowolnym przybliżeniu rozwiązania równań. Przypuśćmy, że chcemy znaleźć przybliżone rozwiązanie równania

$$x^5 + x + 1 = 0.$$

(Wiadomo, że nie ma i nie będzie algebraicznego wzoru na rozwiązanie równań piątego stopnia, w szczególności tego równania). Liczymy

$f(-1) = -1 < 0$ oraz $f(0) = 1 > 0$. Na mocy własności Darboux wnioskujemy, że istnieje rozwiązanie $x \in (-1; 0)$. Mamy zatem rozwiązanie znalezione z dokładnością do 1. Następnie liczymy wartość funkcji w środku odcinka $(-1; 0)$. Mamy $f(-1/2) = -1/32 - 1/2 + 1 > 0$. Zatem rozwiązanie $x \in (-1; -1/2)$. Mamy więc je znalezione z dokładnością do $1/2$. Ponownie bierzemy środek odcinka i liczymy $f(-3/4)$. Jeśli wynik będzie dodatni, to szukane x leży w przedziale $(-1; -3/4)$, a jeśli ujemny, to w przedziale $(-3/4; -1/2)$. W obu wypadkach będziemy mieli rozwiązanie z dokładnością $1/4$. Postępując w ten sposób dalej otrzymamy w n -tym kroku rozwiązanie z dokładnością do 2^{-n} .

Poniżej prezentujemy prosty program komputerowy demonstrujący opisany algorytm i liczący to rozwiązanie z dowolną dokładnością.

```
uses crt;
label 5,10;
var
a,b,c,d,e:real;
f:char;
begin
writeln('Podaj dokladnosc rozwiazania');
readln(d);
a:=-1;b:=0;
5:
c:=(a+b)/2; e:=c*c*c*c*c+c+1;
if e<0 then a:=c;
if e>0 then b:=c;
if b-a<d then goto 10;
goto 5;
10: writeln(c:4:10);
writeln('Nacisnij dowolny klawisz');
f:=readkey;
end.
```

Po wybraniu dokładności $d = 0.00000001$ otrzymaliśmy wynik $x = -0.7548776641$. $\square$

PRZYKŁAD 4.7. Funkcja popytu na pewien towar opisana jest przez funkcję $P(x) = 4000 - 2^x$, gdzie x jest ceną. Natomiast funkcja podaży opisana jest funkcją $1000 + x$. Znajdź cenę równowagi z dokładnością do 1 złotówki.

Rozwiązanie.

Równanie równowagi rynkowej przybiera postać

$$4000 - 2^x = 1000 + x.$$

Jest ono równoważne równaniu

$$f(x) = 3000,$$

gdzie $f(x) = 2^x + x$. Wstawiamy $x = 1$ i otrzymujemy

$$f(1) = 2 + 1 < 3000.$$

Wstawiamy $x = 12$ i mamy

$$f(12) = 4096 + 12 > 3000.$$

Stąd rozwiązanie leży w przedziale $(1; 12)$. Wstawiamy $x = 6$ i mamy

$$f(6) = 64 + 6 < 3000.$$

Rozwiązanie leży w przedziale $(6; 12)$. Wstawiamy $x = 9$ i mamy

$$f(9) = 512 + 9 < 3000.$$

Rozwiązanie leży w przedziale $(9; 12)$. Wstawiamy $x = 10$ i liczymy

$$f(10) = 1024 + 10 < 3000.$$

Rozwiązanie leży w przedziale $(10; 12)$. Wstawiamy $x = 11$ i otrzymujemy

$$f(11) = 2048 + 11 < 3000.$$

Stąd rozwiązanie leży w przedziale $(11; 12)$, a więc mamy je znalezione z dokładnością do 1.

Zatem z dokładnością do 1 złotego cena równowagi jest równa 11 złotym. $\square$

ZADANIA

4.10. Czy równanie $2^x + \sin x + x = 10$ ma rozwiązanie?

4.11. Czy równanie $x + \sin x + \cos x^2 = 0$ ma rozwiązanie?

4.12. Wspomagając się kalkulatorem wyznaczyć rozwiązanie równania $\sqrt{x} + 2^x = 5$ z dokładnością do $1/16$.

4.13. Popyt na pewien towar opisuje funkcja $P(x) = 5000 - \frac{3^x}{10}$, zaś podaż funkcja $Q(x) = 2000 + 2^x$, gdzie x jest ceną w dolarach. Znajdź cenę równowagi rynkowej z dokładnością do jednego dolara.

Rozdział 5.

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

5.1. Pojęcie pochodnej

Mówimy, że funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest **różniczkowalna** w punkcie $x_0 \in (a; b)$, jeśli istnieje granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Granice tę nazywamy **pochodną** funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$.

Jeśli pochodna funkcji f istnieje w każdym punkcie x pewnego przedziału $(a; b)$, to mamy na tym przedziale określoną nową funkcję $f'(x)$. Mówimy wtedy, że f jest różniczkowalna w $(a; b)$.

Różniczkowalność jest własnością mocniejszą niż ciągłość. Prawdziwy jest bowiem następujący fakt:

Funkcja różniczkowalna w punkcie x_0 jest ciągła w tym punkcie.

Jednak nie każda funkcja ciągła jest różniczkowalna.

PRZYKŁAD 5.1. Niech $f(x) = |x|$ i niech $x_0 = 0$. Wtedy

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Jeśli $h > 0$, to powyższe wyrażenie jest równe 1, a jeśli $h < 0$, to -1 . Zatem żądana granica nie istnieje, z czego wynika, że funkcja nie jest różniczkowalna w zerze. $\square$

Definicja pochodnej mówi nam, że dla „małych” h

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0).$$

W liczniku mamy zmianę wartości funkcji, a w mianowniku zmianę argumentu.

Pochodna opisuje zatem stosunek *zmian wartości funkcji* do *zmian argumentu*.

Taką interpretację pochodnej prezentuje inne, również często stosowane oznaczenie pochodnej funkcji f . Oznacza się pochodną funkcji f symbolem

$$\frac{df}{dx}.$$

Licznik w powyższym wyrażeniu oznacza symbolicznie *mały przyrost funkcji*, a mianownik *mały przyrost argumentu*.

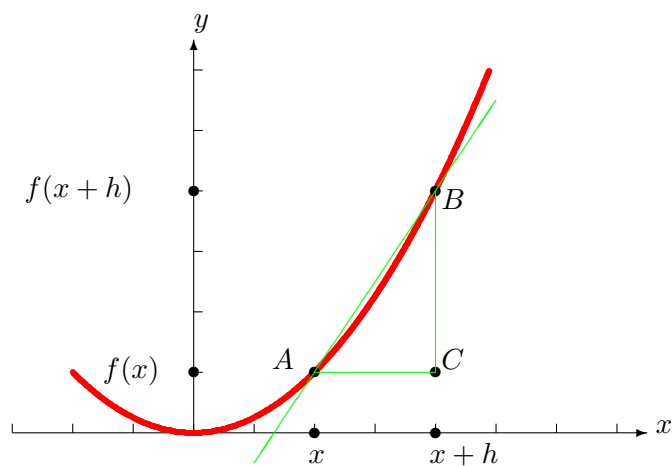
Wstawiając $h = x - x_0$ mamy dla x bliskiego x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

5.2. Interpretacje pochodnej

Popatrzmy na rysunek 5.1. przedstawiający wykres funkcji $f(x)$.

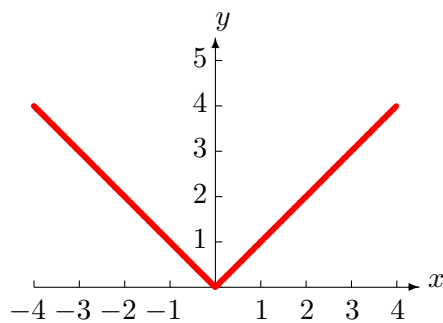
Licznik występujący w definicji pochodnej jest równy długości odcinka CB , a mianownik długości odcinka AC . Zatem cały ułamek jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej AB do osi Ox . Gdy h dąży do 0, to prosta ta staje się prostą styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x, f(x))$. Zatem możemy sformułować następującą interpretację **geometryczną**:



Rysunek 5.1.

Pochodna funkcji w punkcie x jest równa tangensowi kąta między osią Ox i styczną do wykresu tej funkcji w punkcie $(x, f(x))$.

Możemy teraz lepiej pojąć dlaczego funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w zerze. Jej wykres przedstawia rysunek 5.2.

Rysunek 5.2. Wykres funkcji $y = |x|$

Nie można jednoznacznie wykreślić stycznej do wykresu funkcji w punkcie $(0, 0)$.

Pojęcie pochodnej ma też wiele interpretacji fizycznych. Jest to np. chwilowa prędkość. Prędkość jest to bowiem stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu.

Podobnie, przyspieszenie będące stosunkiem przyrostu prędkości do przyrostu czasu jest pochodną prędkości.

Zastanówmy się w jakich jednostkach mierzymy pochodną. Jeśli argument funkcji mierzymy w jednostkach a , wartości funkcji w jednostkach b , to funkcja pochodnej jest mierzona w jednostkach $\frac{a}{b}$.

I tak, jeśli czas (argument) mierzymy w godzinach, drogę w kilometrach to pochodna drogi względem czasu, czyli prędkość musi być mierzona w $\frac{\text{km}}{\text{godz.}}$, a jeśli określimy drogę w metrach, a czas w sekundach, to pochodna drogi względem czasu będzie mierzona w $\frac{\text{m}}{\text{sek.}}$. Widzimy więc, że wartość liczbowa pochodnej opisującej jakieś zjawisko będzie zależała od wyboru jednostek, w jakich mierzymy zarówno argument jak i wartości funkcji.

Jedną z wielu **ekonomicznych** interpretacji pochodnej jest pojęcie *wielkości krańcowych*. Niech np. $K(x)$ będzie funkcją kosztów zależną od wielkości produkcji x . Wówczas

$$\frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0}$$

dąży do $K'(x_0)$ jeśli $x \rightarrow x_0$.

To znaczy, że dla x bliskich x_0 mamy

$$(5.1) \quad K(x) - K(x_0) \approx K'(x_0)(x - x_0).$$

Jeśli w szczególności $x - x_0 = 1$ (przyjmujemy, że jednostka, w której mierzymy produkcję jest mała w stosunku do całej produkcji), to

$$(5.2) \quad K(x_0 + 1) - K(x_0) \approx K'(x_0).$$

Oznacza to, że przyrost kosztów spowodowany zwiększeniem produkcji o jednostkę produktu jest równy w przybliżeniu wartości pochodnej $K'(x)$. Funkcję taką nazywamy funkcją kosztów krańcowych. Jeśli będziemy mierzyć np. wielkość produkcji w tonach, a koszt w złotych, to jednostką kosztów krańcowych będzie złoty/tonę.

Analogicznie wprowadza się zysk krańcowy, podaż krańcową, popyt krańcowy itp.

Możemy to sformułować następująco:

Pochodna opisuje przybliżoną zmianę wartości funkcji przy wzroście argumentu o jedną jednostkę.

PRZYKŁAD 5.2. Niech $K(t)$ oznacza majątek narodowy w chwili t . Inwestycjami oznaczanymi przez $I(t)$ nazywamy przyrost majątku narodowego w danej jednostce czasu (zwykle w ciągu jednego roku). Zatem mamy zależność

$$K'(t) = I(t). \quad \square$$

W ekonomii ważną rolę gra też pojęcie **elastyczności** funkcji. Elastyczność funkcji oznaczana Ef wyraża się wzorem

$$Ef(x) = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}.$$

Aby zrozumieć, co wyraża elastyczność rozważmy procentowe przyrosty argumentu i funkcji jeśli argument zmienił się od x do $x+h$. Wówczas:

Procentowy przyrost argumentu jest równy $\frac{h}{x}$;

Procentowy przyrost wartości funkcji jest równy $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$.

Zatem

$$\frac{\text{Procentowy przyrost wartości}}{\text{Procentowy przyrost argumentu}} = \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} \cdot \frac{h}{x}}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} \cdot \frac{x}{h}.$$

Zakładamy, że przyrost argumentu jest niewielki - zatem

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \approx f'(x).$$

Ostatecznie mamy:

$$\frac{\text{Procentowy przyrost wartości}}{\text{Procentowy przyrost argumentu}} \approx f'(x) \frac{x}{f(x)} = Ef(x).$$

Otrzymujemy zatem wniosek:

Elastyczność funkcji określa stosunek procentowej zmiany wartości funkcji do procentowej zmiany argumentu.

W szczególności, jeśli założymy, że argument zmienił się o 1%, to otrzymamy:

Elastyczność funkcji jest miarą procentowej zmiany wartości funkcji przy przyroście argumentu o 1%.

Dodatkową zaletą rozważania elastyczności zamiast pochodnej, jest to, że jej wartość nie zależy od wyboru jednostek, w których mierzymy argument i wartości funkcji.

5.3. Podstawowe wzory

$$c' = 0 \quad (c - \text{funkcja stała}),$$

$$(cf)' = cf',$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$

$$(fg)' = f'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

(pochodna funkcji złożonej równa się iloczynowi pochodnej funkcji zewnętrznej i pochodnej funkcji wewnętrznej).

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ gdzie } f(x) = y.$$

Wypiszmy pochodne najważniejszych funkcji elementarnych.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}.$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

ZADANIA

5.1. Obliczyć pochodne funkcji $f(x)$ danej wzorem:

a) $x \sin x$

b) $\sin x^2$,

c) $\arcsin x$,

d) $\arccos x$,

e) $\operatorname{arctg} x$,

f) $(\ln x)^3$,

g) $(\sin x)^4$,

h) $\sqrt{1-x^3}$,

i) $\sqrt[n]{x+1}$,

j) $\cos(\sin(x^2))$,

k) $(\sin(x^2))^3$,

l) $\ln(\sin x)$,

m) x^x ,

n) $\frac{\cos x}{x^2+1}$.

Rozwiązanie.

j) Podstawiamy $z(x) = \sin(x^2)$ i $y(x) = x^2$. Mamy $(\cos(\sin(x^2)))' = (\cos z)' \cdot z'(x) = (\cos z)' \cdot z'(y) \cdot y' = -\sin z \cdot \cos y \cdot 2x = -\sin(\sin(x^2)) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$.

m) Podstawmy $x = e^{\ln x}$. Mamy $(x^x)' = (e^{\ln x \cdot x})' = e^{\ln x \cdot x} \cdot (\ln x \cdot x)' = e^{\ln x \cdot x} \cdot (\frac{1}{x}x + \ln x) = e^{\ln x \cdot x} \cdot (1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$.

5.2. Obliczyć elastyczność funkcji $f(x)$ danej wzorem:

- | | |
|--------------|---------------------|
| a) e^x , | b) 2^x , |
| c) 0.1^x , | d) $5x + 3$, |
| e) xe^x , | f) $x^2 + 5x - 1$. |

5.4. *Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a

Twierdzenie Rolle'a. *Zakładamy, że funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $[a; b]$, przy czym $f(a) = f(b)$. Wówczas istnieje taki punkt $c \in (a; b)$, że*

$$f'(c) = 0.$$

Twierdzenie (Wzór) Lagrange'a. *Założmy, że funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $[a; b]$. Wtedy istnieje taki punkt $c \in (a; b)$, że:*

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a).$$

Wzór Lagrange'a pozwala liczyć w przybliżeniu wartości funkcji w punkcie x , gdy zna się wartość funkcji w punkcie x_0 , oraz pochodną funkcji w punkcie x_0 .

Poniższy wniosek jest jednym z najważniejszych faktów w matematyce!

Wniosek. Jeśli $f'(x) = 0$ na pewnym odcinku $(a; b)$, to funkcja f jest na tym odcinku stała.

Uzasadnimy to. Weźmy dowolne dwa punkty x i y z odcinka $(a; b)$ i zastosujmy do nich wzór Lagrange'a. Mamy

$$f(y) = f(x) + f'(c)(y - x),$$

gdzie c jest pewnym punktem z przedziału $(x; y)$. Ale na mocy założenia $f'(c) = 0$ dla każdego c , skąd $f(y) = f(x)$, czyli funkcja jest stała. $\square$

Przykład 5.3. Niech λ będzie ustaloną liczbą. Założmy, że funkcja f jest różniczkowalna i spełnia warunek

$$f' = \lambda f.$$

Pokażemy, że $f(x) = ce^{\lambda x}$, gdzie c jest pewną stałą.

Rozpatrzmy funkcję $g(x) = \frac{f(x)}{e^{\lambda x}}$. Ponieważ i licznik i mianownik są różniczkowalne oraz mianownik jest różny od 0, funkcja g jest różniczkowalna. Korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu, mamy:

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{\lambda x} - (e^{\lambda x})' \cdot f(x)}{(e^{\lambda x})^2} = \frac{\lambda f(x) \cdot e^{\lambda x} - f(x) \cdot \lambda e^{\lambda x}}{(e^{\lambda x})^2} = 0.$$

Z poprzedniego wniosku zatem $g(x)$ jest funkcją stałą, czyli $\frac{f(x)}{e^{\lambda x}} = c$, a więc $f(x) = ce^{\lambda x}$. $\square$

5.5. Model Domara

Model ten został zaproponowany przez Evseya Domara w 1946 roku². Przedstawimy jego główne założenia (w nieco zmodyfikowanej postaci) i rozwiążemy matematyczny problem, do którego ten model prowadzi.

Występujące w modelu wielkości:

- t - czas,
- y - strumień dochodów, który możemy utożsamiać z popytem,
- I - strumień inwestycji,
- s - krańcowa skłonność do oszczędzania,
- w - zdolności produkcyjne,
- K - kapitał (majątek narodowy).

Założenia modelu są następujące:

1. Wzrost stopy inwestycji powoduje wzrost stopy popytu w proporcji $\frac{1}{s}$. Oznacza to, że jeśli strumień inwestycji wzrósł w czasie od t do $t+h$ o wielkość $I(t+h) - I(t)$, to w tym samym czasie popyt (strumień dochodów) wzrósł o wielkość $\frac{1}{s}(I(t+h) - I(t))$. Należy to tak interpretować,

²E. Domar, *Szkice z teorii wzrostu gospodarczego*, PWN 1962, str. 124-141.

że im większa skłonność do oszczędzania s , tym mniej zysków przeznaczanych jest na konsumpcję, a więcej jest lokowanych w oszczędnościach. Postulat ten daje równanie (po podzieleniu przez h):

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{1}{s} \cdot \frac{I(t+h) - I(t)}{h}.$$

Obliczając granicę obu stron powyższej równości przy h dążącym do 0 otrzymujemy równanie

$$(5.3) \quad y'(t) = \frac{1}{s} I'(t).$$

2. Stosunek zdolności produkcyjnych i kapitału jest stały:

$$\frac{w(t)}{K(t)} = \rho = \text{constans},$$

czyli

$$w(t) = \rho K(t).$$

Różniczkując tę równość otrzymujemy drugie ważne równanie modelu

$$(5.4) \quad w'(t) = \rho K'(t).$$

Ale przyrost majątku narodowego w czasie od t do $t+h$ jest równy strumieniowi inwestycji, czyli

$$K(t+h) - K(t) = I(t)h.$$

Dzieląc obie strony przez h i przechodząc z h do zera otrzymujemy

$$K'(t) = I(t).$$

3. Stan równowagi jest rozumiany jako sytuacja, w której możliwości produkcyjne są maksymalnie wykorzystane, czyli

$$y(t) = w(t).$$

Różniczkując to równanie otrzymujemy

$$y'(t) = w'(t).$$

Wstawiając do tego równania równania 5.3 i 5.4 ostatecznie otrzymujemy:

$$(5.5) \quad I'(t) = s\rho I(t).$$

Podstawmy $s\rho = \lambda$. Mamy wtedy równanie

$$I'(t) = \lambda I(t).$$

Z przykładu 5.2 wiemy, że I musi być funkcją postaci

$$I(t) = ce^{\lambda t}.$$

Wstawiając $t = 0$ otrzymujemy

$$I(0) = c,$$

co ostatecznie daje

$$I(t) = I(0)e^{\lambda t} = I(0)(e^{s\rho})^t.$$

Otrzymaliśmy zatem następujący rezultat ekonomiczny:

Dla utrzymania równowagi pomiędzy możliwościami produkcyjnymi, a popytem, stopa inwestycji musi mieć wzrost wykładniczy o podstawie $e^{s\rho}$.

Zastanowimy się teraz, co się będzie działo, jeśli strumień inwestycji będzie miał wzrost wykładniczy, ale o innej podstawie, np. e^r , gdzie r jest pewną ustaloną liczbą dodatnią *różną* od $s\rho$. Wtedy warunek równowagi nie musi być spełniony - prawdziwe są tylko równania (5.3) i (5.4). Wstawiamy $I(t) = I(0)e^{rt}$ do tych równań. Otrzymujemy

$$y'(t) = \frac{1}{s}I(0)re^{rt}$$

oraz

$$w'(t) = \rho I(0)e^{rt}.$$

Dzieląc stronami mamy

$$\frac{y'(t)}{w'(t)} = \frac{r}{s\rho}.$$

Co wynika z ostatniej równości? Jeśli $r > s\rho$, to popyt rośnie szybciej niż możliwości produkcyjne i będziemy mieli do czynienia z niedoborem produkcji. Natomiast jeśli $r < s\rho$, to popyt rośnie wolniej niż możliwości produkcyjne i nastąpi nadprodukcja.

Wynik ten wydaje się na pierwszy rzut oka paradoksalny. Oznacza bowiem, że jeśli inwestycje rosną szybciej niż w sposób potrzebny dla stanu równowagi ($r > s\rho$), to możliwości produkcyjne będą za małe; i na odwrót – jeśli inwestycje rosną wolniej niż w sposób potrzebny dla stanu równowagi, to nastąpi nadprodukcja.

Rozwiązanie powyższe pokazuje, że decyzje oparte na intuicji, bez ścisłego rozwiązania problemu mogą być niewłaściwe. Jeśli bowiem założymy, że przedsiębiorstwa będą miały możliwość wyboru stopy r , to należy oczekiwać, że przy niedoborze możliwości produkcyjnych przedsiębiorstwa zdecydują się zwiększyć wielkość r , czyli możliwości produkcyjne. Ale z naszych rozważań wynika, że spowoduje to jeszcze większy niedobór możliwości produkcyjnych!

Model Domara nie jest jedynym modelem opisującym rzeczywistość ekonomiczną i istnieją „ulepszone” wersje takiego modelu, w których intuicja w większym stopniu zgadza się z matematycznym rozwiązaniem.

5.6. Monotoniczność i ekstrema

Poniższy fakt ma fundamentalne znaczenie w wielu zastosowaniach.

TWIERDZENIE. *Jeśli funkcja jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ i jej pochodna w tym przedziale jest dodatnia (odpowiednio ujemna), to funkcja jest w tym przedziale rosnąca (odpowiednio malejąca).*

PRZYKŁAD 5.4. Rozważmy następujący model wykorzystujący ten fakt. W modelu tym mamy wielkości:

- x - wielkość produkcji,

- $y = f(x)$ - cena produktu, czyli przeciętny dochód,
- $R(x)$ - utarg (inaczej zwany przychodem całkowitym).

Utag jest równy

$$R(x) = xf(x).$$

Stąd otrzymujemy utarg krańcowy

$$R'(x) = f(x) + xf'(x).$$

Zapiszmy to w postaci

$$R'(x) - f(x) = xf'(x).$$

Jeśli cena jest stała, to $f'(x) = 0$, a więc cena jest równa krańcowemu utargowi.

Jeśli cena rośnie, to $f'(x) > 0$, zatem $xf'(x) > 0$ (bowiem wielkość produkcji x musi być dodatnia) i wówczas $R'(x) - f(x) > 0$, a więc utarg krańcowy (czyli przychód pochodzący od jednej jednostki towaru) jest większy od ceny.

Jeśli natomiast cena spada, to $f'(x) < 0$, a więc i $xf'(x) < 0$ - wówczas utarg krańcowy jest mniejszy od ceny. $\square$

Wprowadzimy teraz definicję.

Mówimy, że funkcja f osiąga w punkcie c **maksimum** (**minimum**), jeśli w pewnym otoczeniu punktu c przyjmuje poza punktem c wartości mniejsze (odpowiednio większe).

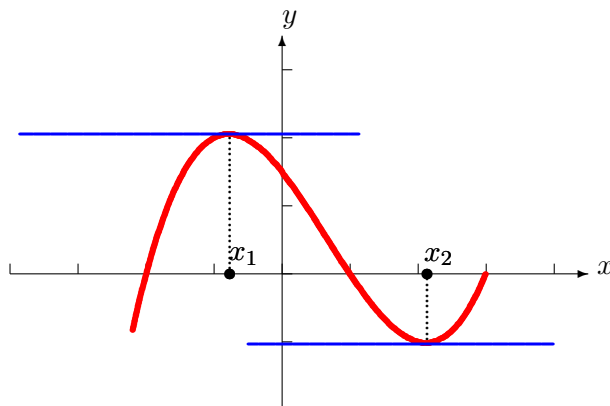
Minima i maksima nazywamy wspólnym określeniem – **ekstrema**.

Następne twierdzenie pozwala szukać ekstremów funkcji różniczkowalnych.

TWIERDZENIE. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i ma w punkcie c ekstremum, to $f'(c) = 0$.*

Sytuację tą ilustruje rysunek 5.3. W punkcie x_1 jest maksimum, a w punkcie x_2 minimum. W punktach wykresu $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ styczne do wykresu są poziome, co oznacza, że kąt pomiędzy nimi i osią Ox jest równy 0. A zatem tangens tego kąta też jest równy zeru. Ale, jak pamiętamy, tangens kąta pomiędzy osią Ox i styczną jest to właśnie wartość pochodnej.

Punkty, w których pochodna się zeruje będziemy nazywać *punktami stacjonarnymi*, albo inaczej *punktami podejrzanymi o ekstremum*. Pod-



Rysunek 5.3.

kreślmy słowo *podejrzany*, bowiem zerowanie się pochodnej w punkcie x_0 nie gwarantuje jeszcze, że w punkcie x_0 jest ekstremum.

PRZYKŁAD 5.5. Niech $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$. Obliczamy pochodną funkcji f .

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2.$$

Przyrównujemy pochodną do zera. Mamy równanie

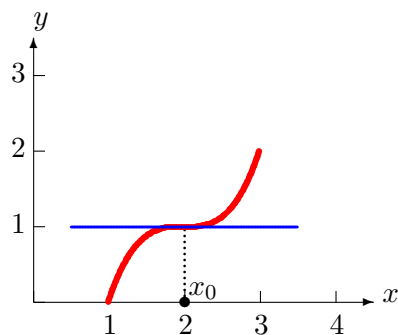
$$(x - 2)^2 = 0.$$

Stąd otrzymujemy jeden punkt stacjonarny $x_0 = 2$. Ponieważ $f'(x)$ jest dodatnia poza punktem $x = 2$, funkcja f jest rosnąca zarówno na lewo od punktu 2 jak i na prawo od punktu 2. Nie ma więc w punkcie 2 (ani w żadnym innym) ekstremum (rysunek 5.4.).

Jak stwierdzić, czy w punkcie stacjonarnym jest maksimum lub minimum, czy go nie ma? Jeszcze raz popatrzmy na rysunek 5.3. Na lewo od punktu x_1 , w którym jest maksimum, funkcja jest rosnąca, a na prawo malejąca. Odwrotna jest sytuacja w punkcie x_2 , w którym jest minimum. Na lewo od tego punktu funkcja maleje, a na prawo rośnie.

Natomiast po obu stronach punktu x_0 na rysunku 5.4. funkcja rośnie.

Opiszemy możliwe sytuacje przy pomocy poniższej tabelki.



Rysunek 5.4.

Znak pochodnej na lewo od punktu stacjonarnego x_0	Znak pochodnej na prawo od punktu stacjonarnego x_0	W punkcie x_0
+	+	nie ma ekstremum
+	−	jest maksimum
−	+	jest minimum
−	−	nie ma ekstremum

PRZYKŁAD 5.6. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x) = e^x - 4x$.

1. Obliczamy pochodną funkcji. Otrzymujemy

$$f'(x) = e^x - 4.$$

2. Przyrównujemy pochodną do zera. Mamy równanie

$$e^x = 4.$$

Stąd otrzymujemy jeden punkt stacjonarny $x_0 = \ln 4$. Bierzemy jakiś punkt na lewo od punktu x_0 , np. 0 i ustalamy znak $f'(0)$. Mamy

$$f'(0) = e^0 - 4 = -3 < 0.$$

Bierzemy jakiś punkt na prawo od x_0 , np. 10 i ustalamy znak $f'(10)$. Mamy

$$f'(10) = e^{10} - 4 > 0.$$

(zwróćmy uwagę na to, że nie musimy dokładnie wyliczać wartości pochodnej, a tylko stwierdzić, jaki ma znak). Zatem na lewo od punktu x_0 pochodna jest ujemna, a na prawo dodatnia. Otrzymujemy odpowiedź:

Funkcja ma minimum w punkcie $\ln 4$. $\square$

PRZYKŁAD 5.7. Powróćmy do modelu z przykładu 5.3. Zastanowimy się, jakie muszą być spełnione warunki aby funkcja utargu osiągała maksimum.

Oczywiście dziedziną funkcji utargu jest przedział $[0; \infty)$. Nie możemy sprzedać ujemnej ilości towaru. Jeśli cena jest dodatnia, to jasne jest, że od punktu $x = 0$ do jakiegokolwiek punktu $x > 0$ wartość funkcji utargu wzrośnie. Zatem na początku funkcja utargu jest rosnąca. Rozważmy pierwszy punkt stacjonarny. W takim punkcie musi zachodzić równość

$$f(x) + xf'(x) = 0.$$

Oznacza to, że

$$xf'(x) = -f(x).$$

Dzieląc przez $f(x)$ otrzymujemy

$$f'(x) \frac{x}{f(x)} = -1.$$

Ponieważ lewa strona ostatniej równości oznacza elastyczność funkcji f w punkcie x , otrzymujemy odpowiedź:

Jeśli funkcja utargu osiąga w punkcie x_0 maksimum, to elastyczność funkcji utargu w tym punkcie wynosi: -1 . $\square$

Warto w tym miejscu dodać, że funkcja może mieć ekstremum w pewnym punkcie i być nieróżniczkowalna w tym punkcie. Np. funkcja $f(x) = |x|$ ma minimum w punkcie 0 i jest w tym punkcie nieróżniczkowalna. Oczywiście w takiej sytuacji nie można znaleźć ekstremum przy pomocy rachunku różniczkowego.

ZADANIA

5.3. Sprawdzić czy poniższe funkcje są rosnące lub malejące:

a) $f(x) = \sin x - 2x$;

b) $f(x) = \cos 3x + 5x$,

c) $f(x) = x^3 + x^2 + x$,

d) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2+1}$.

Rozwiązanie.

a) Obliczając pochodną mamy

$$(\sin x - 2x)' = \cos x - 2.$$

Z nierówności $-1 \leq \cos x \leq 1$ wynika, że

$$\cos x - 2 \leq -1 < 0.$$

Pochodna funkcji jest ujemna, a zatem funkcja jest malejąca. $\square$

5.7. Wyznaczanie największej (najmniejszej) wartości funkcji

Z rozważań poprzedniego paragrafu wynika następujący fakt: funkcja różniczkowalna określona na przedziale domkniętym $[a; b]$ przyjmuje swoją największą (najmniejszą) wartość albo w punkcie, w którym pochodna się zeruje (tak zwanym *punkcie stacjonarnym* lub *punkcie podejrzanym o ekstremum*), albo na końcu przedziału.

Ten fakt pozwala poszukiwać największej (najmniejszej) wartości funkcji w przedziale $[a; b]$ według następującej procedury:

Krok 1. Różniczkujemy funkcję i przyrównujemy pochodną do zera znajdując punkty stacjonarne $x_1, \dots, x_n$ należące do przedziału $[a; b]$.

Krok 2. Obliczamy wartości funkcji w tych punktach oraz wartości na końcach przedziału. Jeśli przedział jest otwarty lub nieskończony, to wartości na końcach zastępujemy odpowiednimi granicami funkcji.

Krok 3. Spośród powyższych wartości wybieramy największą (najmniejszą).

PRZYKŁAD 5.8. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$$

w przedziale $[0.1; 10]$.

Obliczamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy rozwiązanie $x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Obliczamy $f(x_1)$, $f(0.1)$ i $f(10)$. Mamy:

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} + \sqrt[4]{3},$$

$$f(0.1) = 0.001 + 10,$$

$$f(10) = 1000 + 0.1.$$

Widzimy, że najmniejszą wartością jest pierwsza.

Odpowiedź: Najmniejszą wartością funkcji $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ w przedziale $[0.1; 10]$ jest liczba $\frac{1}{\sqrt[4]{27}} + \sqrt[4]{3}$. $\square$

PRZYKŁAD 5.9. W jakim punkcie przedziału $(0; \infty)$ funkcja

$$f(x) = \ln x - 2x$$

przyjmuje największą wartość?

Obliczamy pochodną:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2.$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy rozwiązanie $x_1 = 1/2$. Przedział jest otwarty, więc obliczamy granice

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

Ponieważ wartość funkcji w punkcie $x = 1/2$ jest skończona, wartość ta jest spośród tych trzech wartości największa (zauważmy, że nie musimy jej obliczać!). Otrzymujemy więc odpowiedź:

Funkcja przyjmuje największą wartość w przedziale $(0; \infty)$ w punkcie $x = 1/2$. $\square$

PRZYKŁAD 5.10. Z kwadratowego kawałka blachy o boku a wycinamy na rogach cztery kwadraciki (zakropkowane na rysunku 5.5.). Następnie boki zaginamy (wzdłuż przerywanych linii) i lutujemy blachę. Jakie kwadraciki należy wycinać, aby objętość otrzymanego w ten sposób zbiornika była największa?

Oznaczmy bok wyciętego kwadratu przez x . Wówczas objętość pudełka dana jest wzorem

$$V(x) = (a - 2x)^2 x.$$

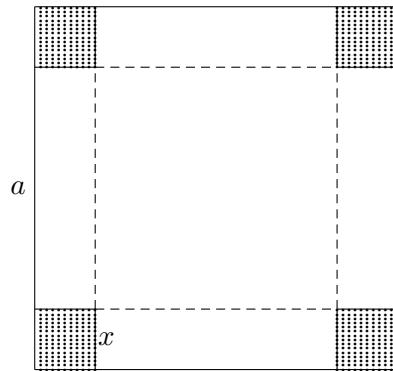
Zauważmy, że x zmienia się od 0 do $\frac{1}{2}$. Obliczamy pochodną funkcji

$$V'(x) = (-2) \cdot 2(a - 2x)x + (a - 2x)^2 =$$

$$(a - 2x)(-4x + a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy dwa punkty stacjonarne $x_1 = a/2$ oraz $x_2 = a/6$. Pierwszy z nich jest jednocześnie końcem przedziału. Liczymy wartości w punkcie stacjonarnym i na końcach. Mamy:

$$f\left(\frac{a}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{27}a^3,$$



Rysunek 5.5.

$$f(0) = 0,$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = 0.$$

Największą z tych wartości jest $\frac{2}{27}a^3$.

Odpowiedź: Należy wycinać kwadraciki o boku długości $\frac{a}{6}$. $\square$

PRZYKŁAD 5.11. Pewien zakład ma wyprodukować w ciągu roku 10000 sztuk pewnego wyrobu. Przygotowanie zakładu do każdego cyklu produkcyjnego kosztuje 500 złotych. Koszt magazynowania jednej sztuki wyrobu wynosi 10 złotych rocznie. Przy jakich seriach produkcyjnych koszt całej produkcji będzie najmniejszy?

Niech x oznacza liczbę sztuk produktu w jednym cyklu. Zakład trzeba przygotować do produkcji $\frac{10000}{x}$ razy. Zatem całkowity koszt przygotowania zakładu do produkcji wynosi $\frac{10000 \cdot 500}{x}$.

Założmy, że zbyt towarów jest równomierny, tzn., że w momencie magazynowania następnej partii magazyn został właśnie opróżniony. Możemy więc przyjąć, że w każdym odstępie czasu dzielącym dwa kolejne cykle produkcyjne znajduje się średnio $x/2$ sztuk wyrobu. Zatem i w ciągu całego roku średnio w magazynie znajduje się $x/2$ sztuk wyrobu. Stąd koszt magazynowania wynosi $10 \cdot x/2$.

Oznaczmy przez K_s koszty stałe (niezależne od długości cyklu).

Ostatecznie więc koszt całkowity $K(x)$ wynosi

$$K(x) = \frac{10000 \cdot 500}{x} + 10 \frac{x}{2} + K_s.$$

Najmniejszą wartością jaką może przyjmować x jest 1, a największą 10000.

Obliczmy pochodną

$$K'(x) = -\frac{10000 \cdot 500}{x^2} + 5.$$

Przyrównujemy K' do 0. Mamy $K'(x) = 0$, jeśli $x = \sqrt{1000000} = 1000$.

A teraz obliczamy wartości w punkcie stacjonarnym ($x = 1000$) i na krańcach. Mamy

$$f(1000) = 5000 + 5000 + K_s = 10000 + K_s,$$

$$f(1) = 5000000 + 5 + K_s,$$

$$f(10000) = 500 + 50000 + K_s.$$

Widzimy, że najmniejszą wartośćią jest pierwsza. Daje nam to

Odpowiedź: Koszt produkcji będzie najmniejszy przy seriach produkcyjnych wielkości 1000 sztuk. $\square$

PRZYKŁAD 5.12. Mamy transportować towar z miasta A do miasta B najpierw drogą lądową, a potem drogą morską. Koszt transportu lądowego wynosi l na jeden km, a drogą morską m na km ($m < l$). Zakładamy, że brzeg morski jest linią prostą. Gdzie należy umiejscowić port przeładunkowy P aby całkowity koszt transportu był najmniejszy?

Popatrzmy na rysunek 5.6. Oznaczmy przez A' rzut punktu A na oś Ox . Oznaczmy przez α kąt między odcinkami AA' i AP , a przez β kąt między odcinkami BO i BP . Oznaczmy długość odcinka OA' przez k , a przez x długość odcinka OP . Koszt transportu drogą lądową wynosi $|AP|l = l\sqrt{(k-x)^2 + |AA'|^2}$, a drogą morską $|BP|m = m\sqrt{x^2 + |OB|^2}$. Zatem koszt całkowity jest równy:

$$K(x) = l\sqrt{(k-x)^2 + |AA'|^2} + m\sqrt{x^2 + |OB|^2},$$

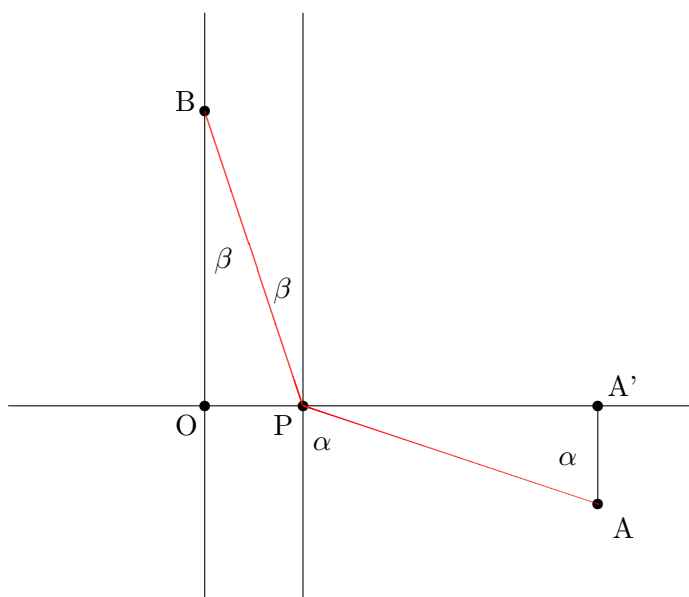
przy czym $x \in (-\infty; \infty)$.

Mamy

$$\begin{aligned} K'(x) &= m \frac{x}{\sqrt{x^2 + |OB|^2}} - l \frac{k-x}{\sqrt{(k-x)^2 + |AA'|^2}} = \\ &= m \frac{|OP|}{|PB|} - l \frac{|AA'|}{|AP|} = m \sin \beta - l \sin \alpha. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że $K'(0)$ wtedy gdy $\frac{m}{l} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$.

Ponieważ granice funkcji w $\pm\infty$ są równe $+\infty$, funkcja przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie spełniającym powyższą zależność. $\square$



Rysunek 5.6.

Wyprowadzona zależność przypomina znane z fizyki prawo załamania światła, które zresztą wyprowadza się w identyczny sposób. Korzystamy z zasady Fermata mówiącej o tym, że światło wybiera taką drogę, przy której zużywa najmniej czasu. Widzimy zatem, że Ten, kto tworzył to prawo rozwiązywał problem ekonomiczny!

ZADANIA

5.7. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f w zbiorze A :

- a) $f(x) = x^3 - x + 1$, $A = [0; 2]$;
- b) $f(x) = (x - 1)e^x$, $A = [-1; 1]$;
- c) $f(x) = x - \sqrt{x - 1}$, $A = [1; 3]$,
- d) $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $A = [0.1; \infty)$.

5.8. Mamy do ogrodzenia kawałek pola w kształcie prostokąta przylegającego z jednej strony do rzeki. Dysponujemy 200 metrami siatki. Jakie powinny być wymiary pola, aby jego powierzchnia była największa?

5.9. Z kawałka blachy o wymiarach 60×40 centymetrów robimy pudełko wycinając na rogach kwadraty, zaginając a następnie lutując blachę. Jakiej wielkości kwadraty należy wycinać, aby objętość pudełka była największa?

5.10. Puszka ma mieć kształt walca i objętość 1 litra. Jakie powinny być wymiary puszki, aby ilość zużytej blachy była najmniejsza?

5.8. Reguła de l'Hospitala

Jest to metoda liczenia pewnych granic postaci $\frac{f(x)}{g(x)}$, gdzie $f(x)$ i $g(x)$ dążą jednocześnie do 0 lub ∞ .

Zakładamy, że

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$$

(b może być skończoną liczbą lub $\pm\infty$),

oraz

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g.$$

Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = g.$$

Uwaga. Odpowiednie granice w powyższej regule mogą być jednostronne.

Tę regułę w skrócie oznacza się jako regułę **H**.

PRZYKŁAD 5.13. Policzmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Założenia reguły H są spełnione. Mamy zatem

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1. \quad \square$$

PRZYKŁAD 5.14. Policzmy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

(Dla $x \leq 0$ wyrażenie x^x nie ma sensu!) Mamy

$$\ln x^x = x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Funkcje $f(x) = \ln x$ i $g(x) = \frac{1}{x}$ spełniają założenia reguły H.

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0.$$

Stąd $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$. $\square$

ZADANIA

5.11. Obliczyć granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2},$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2},$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x},$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2} - e^x}{x^2 - x},$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x},$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 2}},$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x},$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 \cdot x,$

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} x,$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 e^x,$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{100}}{x}.$

Rozwiązanie.

l) Podstawmy $y = \ln x$. Wówczas gdy $x \rightarrow \infty$, to również $y \rightarrow \infty$ oraz $x = e^y$. Zatem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{100}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{100}}{e^y}.$$

Stosując 100 razy regułę H otrzymamy

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{100}}{e^y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{100!}{e^y} = 0. \quad \square$$

5.9. Pochodna drugiego rzędu

Jeśli funkcja f ma pochodną f' , i z kolei funkcja f' też ma pochodną, to pochodną $(f')'$ nazywamy **pochodną drugiego rzędu** lub **drugą pochodną** funkcji f i oznaczamy f'' .

Wartość drugiej pochodnej pozwala nam wyznaczać ekstrema funkcji. Zachodzi bowiem:

TWIERDZENIE. *Założmy, że funkcja f ma pierwszą i drugą pochodną oraz $f'(a) = 0$. Wówczas jeśli $f''(a) < 0$, to w punkcie a jest maksimum lokalne, a jeśli $f''(a) > 0$, to w punkcie a jest minimum lokalne.*

PRZYKŁAD 5.15. Znajdźmy ekstrema funkcji $f(x) = x^3 - 6x + 1$. Punkty podejrzane o ekstremum znajdziemy obliczając pochodną funkcji f i przyrównując ją do zera. Mamy $f'(x) = 3x^2 - 6$. Zatem te punkty to $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$. Obliczamy drugą pochodną $f''(x) = 6x$. Mamy $f(x_1) = -6\sqrt{2}$ i $f(x_2) = 6\sqrt{2}$. Zatem w punkcie $x = -\sqrt{2}$ jest maksimum, a w punkcie $x = \sqrt{2}$ jest minimum. $\square$

Jednak nie zawsze warto do wyznaczenia ekstremum liczyć drugie pochodne.

PRZYKŁAD 5.16. Wyznamy ekstrema funkcji $f(x) = x^2(1 - x)$ w przedziale $[0; 1]$. Liczymy jej pochodną $f'(x) = x(2 - 3x)$. $f'(x) = 0$ jeśli $x = 0$ lub $x = 2/3$. Ponieważ funkcja jest w przedziale $(0; 1)$ nieujemna i na końcach przyjmuje wartości 0, ekstremum może być tylko w punkcie $\frac{2}{3}$ i jest to maksimum, bo $f(2/3) > 0$. $\square$

ZADANIA

5.12. Obliczyć drugą pochodną funkcji f określonej wzorem:

- | | |
|-------------------|------------------------|
| a) $x^2 \ln x$, | b) $\sin 3x$, |
| c) e^{x^2} , | d) $\frac{x^2}{1-x}$, |
| e) $e^x \cos x$, | f) $x^4 - 3x^3 - x$. |

5.13. Wyznamy ekstrema funkcji wykorzystując drugą pochodną:

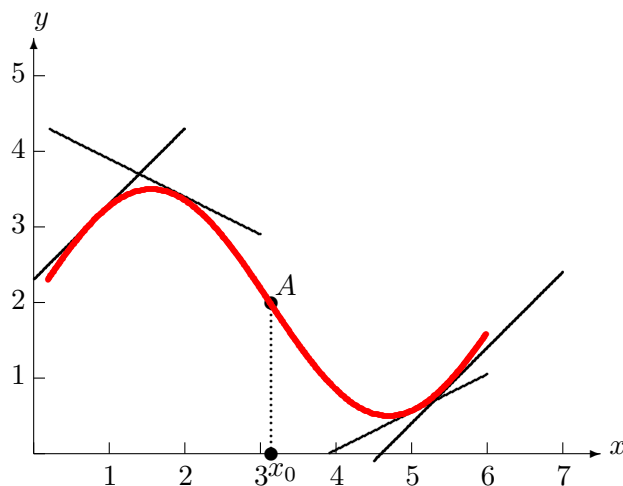
- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$, | b) $f(x) = x + \frac{1}{2x}$, |
| c) $f(x) = xe^{-x^2/2}$, | d) $f(x) = xe^x$, |
| e) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 7$, | f) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$. |

Rozwiązanie.

c) Mamy $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$. $f'(x) = 0$ dla $x = -1$ i $x = 1$. Dalej $f''(x) = (x^3 - 3x)e^{-x^2/2}$. Sprawdzamy wartości $f''(x)$ w punktach podejrzanych o ekstremum. I tak $f''(-1) = \frac{2}{\sqrt{e}}$ i $f''(1) = -\frac{2}{\sqrt{e}}$. A więc w punkcie -1 jest minimum, a w punkcie 1 maksimum. $\square$

5.10. Funkcje wypukłe i wklęsłe

Mówimy, że różniczkowalna funkcja f jest **wypukła** (odpowiednio **wklęsła**) w przedziale $(a; b)$, jeśli styczna do wykresu w punkcie $(x, f(x))$ dla $x \in (a; b)$ leży poniżej (odpowiednio powyżej) wykresu funkcji. Punkt $(x, f(x))$ nazywamy *punktem przegięcia* wykresu funkcji f , jeśli po jednej stronie tego punktu funkcja jest wypukła, a po drugiej wklęsła.



Rysunek 5.7.

Funkcja, której wykres jest przedstawiony na rysunku 5.7 jest wklęsła na lewo od punktu x_0 i wypukła na prawo od tego punktu. Punktem przegięcia jest punkt A o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$.

Wypukłość funkcji możemy badać przy pomocy rachunku różniczkowego.

TWIERDZENIE. *Jeśli $f'' > 0$ w przedziale $(a; b)$, to funkcja jest wypukła, a jeśli $f'' < 0$, to funkcja jest wklęsła. Jeśli $f''(x) = 0$ i f'' ma różne znaki po obu stronach x , to $(x, f(x))$ jest punktem przegięcia.*

Aby się przekonać o słuszności tego twierdzenia popatrzmy na rysunek 5.7. Zwróćmy uwagę na część wypukłą tej funkcji leżącą na prawo od punktu x_0 . Jeśli będziemy rozważać styczne w różnych punktach tej części wykresu, to zauważymy, że przy przejściu od pewnego punktu do punktu leżącego bardziej na prawo styczna obróci się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. A to oznacza, że kąt pomiędzy osią Ox , a styczną wzrośnie. A zatem wzrośnie i tangens tego kąta. Ale tangens tego kąta to jest właśnie pochodna. Zauważyliśmy zatem, że wypukłość funkcji pociąga za sobą wzrost funkcji pochodnej. Ale funkcja rośnie, gdy jej pochodna, czyli druga pochodna funkcji f jest dodatnia.

W podobny sposób argumentujemy, że wklęsłość pociąga za sobą ujemność drugiej pochodnej.

PRZYKŁAD 5.17. Wyznamy przedziały wypukłości, wklęsłości i punkty przegięcia funkcji $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Mamy:

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Stąd $f''(x) = 0$ wtedy gdy $x = 1$ lub $x = -1$. $f''(x) < 0$ dla $x \in (-1; 1)$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1)$ lub $x \in (1; \infty)$. Zatem funkcja jest wklęsła w przedziale $(-1; 1)$ wypukła w przedziałach $(-\infty; -1)$ i $(1; \infty)$. Punkty $(-1, 1/\sqrt{e})$ i $(1, 1/\sqrt{e})$ są punktami przegięcia. $\square$

Informacja o wklęsłości bądź wypukłości funkcji może być pomocna przy podejmowaniu wielu decyzji.

Przypuśćmy, że zastanawiamy się, czy sprzedać posiadane akcje. Zauważyliśmy, że wprawdzie cena akcji idzie w górę, ale tempo wzrostu tych akcji gwałtownie spada. Sytuacja ta sugeruje, że wkrótce cena akcji przestanie rosnąć i zacznie spadać. Decydujemy więc o ich sprzedaży.

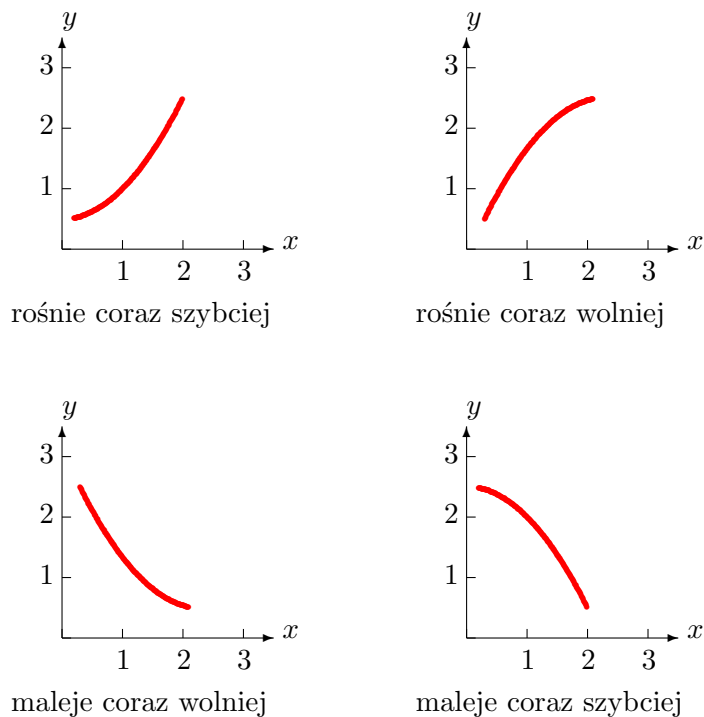
Funkcja może:

- 1) rosnąć coraz szybciej,
- 2) rosnąć coraz wolniej,

3) maleć coraz szybciej,

4) maleć coraz wolniej.

Sytuacje te prezentują rysunki 5.8.



Rysunki 5.8.

Zauważmy, że na rysunkach po lewej stronie funkcja jest wypukła, a po prawej wklęsła.

Znak pierwszej i drugiej pochodnej dostarcza nam informacji o tym, czy tempo wzrostu lub spadku funkcji samo rośnie albo spada. Mamy bowiem następujące sytuacje:

f'	f''	symbol	funkcja
+	+		rośnie coraz szybciej
+	-		rośnie coraz wolniej
-	+		maleje coraz wolniej
-	-		maleje coraz szybciej

PRZYKŁAD 5.18. Sprawdzić w jakim przedziale funkcja

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

maleje coraz wolniej.

Rozwiązanie.

Funkcja maleje coraz wolniej jeśli: 1) $f' < 0$ i 2) $f'' > 0$. Mamy

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Stąd wnioskujemy, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (0; 2)$. Dalej

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Widzimy, że $f''(x) > 0$ dla $x \in (1; \infty)$. Otrzymujemy ostatecznie odpowiedź:

Funkcja maleje coraz wolniej w przedziale $(1; 2)$. $\square$

PRZYKŁAD 5.19. Sprawdzić, czy w otoczeniu punktu $x = 10$ funkcja

$$f(x) = 3x + \frac{200}{x} :$$

- a) rośnie coraz szybciej,
- b) rośnie coraz wolniej,
- c) maleje coraz szybciej,
- d) maleje coraz wolniej.

Rozwiązanie.

Należy ustalić znak pierwszej i drugiej pochodnej w punkcie 10. Mamy

$$f'(x) = 3 - \frac{200}{x^2},$$

oraz

$$f''(x) = \frac{400}{x^3}.$$

Wstawiamy $x = 10$ i widzimy, że $f'(10) = 1 > 0$ i $f''(10) = 0.4 > 0$. Otrzymujemy więc odpowiedź:

W otoczeniu punktu 10 funkcja rośnie coraz szybciej. $\square$

ZADANIA

5.14. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji:

- a) $f(x) = x^3 - x^2 - x$;
- b) $g(x) = x^2 - \frac{2}{x}$;
- c) $f(x) = \ln(1 + x^2)$;
- d) $f(x) = x^4 + e^x$;

e) $f(x) = 12\sqrt{x} + x^3$;

f) $f(x) = 2x \ln x - x^2$.

5.15. W jakich przedziałach funkcja dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x} - x^2 :$$

a) rośnie coraz szybciej?

b) maleje coraz wolniej?

5.16. W jakich przedziałach funkcja dana wzorem

$$f(x) = xe^{-x} :$$

a) rośnie coraz wolniej?

b) maleje coraz wolniej?

c) rośnie coraz szybciej?

5.17. Sprawdzić czy w otoczeniu punktu $x = 1$ funkcja

$$f(x) = \frac{3x - 5}{4x + 7} :$$

a) rośnie coraz szybciej,

b) rośnie coraz wolniej,

c) maleje coraz szybciej,

d) maleje coraz wolniej.

5.11. Asymptoty

Intuicyjnie asymptotą krzywej $y = f(x)$ nazywamy prostą do której zbliża się wykres funkcji $f(x)$ przy x zbliżonym do pewnego x_0 lub $\pm\infty$.

Prostą $x = c$ nazywamy **asymptotą pionową** krzywej $y = f(x)$, jeśli

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty.$$

Prostą $y = ax + b$ nazywamy **asymptotą ukośną** krzywej $y = f(x)$, jeśli

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej jest asymptota **pozioma** gdy $a = 0$. Innymi słowy prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą, jeśli

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b.$$

Współczynniki a i b ewentualnych asymptot liczymy ze wzorów:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

lub

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x),$$

oraz

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax).$$

PRZYKŁAD 5.20. Wyznaczyć asymptoty krzywej

$$y = \frac{x^2}{1-x} \quad (x \neq 1).$$

Rozwiązanie.

Widzimy, że

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = \infty,$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = -\infty.$$

Zatem prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową.

Szukamy asymptoty ukośnej:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1.$$

Stąd $a = -1$. Liczymy b .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + (1-x)x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1.$$

Stąd $b = -1$. Zatem prosta $y = -x - 1$ jest asymptotą ukośną i w $+\infty$ i w $-\infty$. $\square$

PRZYKŁAD 5.21. Wyznaczyć asymptoty krzywej

$$y = x + \ln x \quad (x > 0).$$

Rozwiązanie.

Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln x = 0 + (-\infty) = -\infty.$$

Stąd prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową.

Szukamy asymptoty ukośnej:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \ln x)' = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1.$$

Stąd $a = 1$. Liczymy b .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \ln x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty.$$

Zatem b nie istnieje. Krzywa nie posiada asymptoty ukośnej. $\square$

ZADANIA

5.18. Wyznaczyć asymptoty krzywych:

a) $y = \frac{2x}{1+x^2};$

b) $y = \frac{x^2}{x-3};$

c) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}};$

5.12. Schemat badania funkcji

Funkcję będziemy badać według następującego schematu:

1. Wyznaczamy dziedzinę funkcji i ewentualnie miejsca zerowe (jeśli się da);
2. Obliczamy granice na końcach przedziałów określoności i wyznaczamy asymptoty;
3. Liczymy pierwszą pochodną i określamy przedziały monotoniczności funkcji i punkty podejrzone o ekstrema;
4. Liczymy drugą pochodną i wyznaczamy przedziały wypukłości, wklęsłości funkcji i punkty przegięcia;
5. Sporządzamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji;
6. Szkicujemy wykres funkcji.

PRZYKŁAD 5.22. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$$

Rozwiązanie.

Dziedziną funkcji jest $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Granice i asymptoty tej funkcji policzyliśmy już w poprzednim przykładzie. I tak $x = 1$ jest asymptotą pionową i $y = -x - 1$ jest asymptotą ukośną dla $-\infty$ i dla $+\infty$.

$$f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

$f'(x) = 0$ gdy $x = 0$ lub $x = 2$. $f'(x) > 0$ dla $x \in (0; 1) \cup (1; 2)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$. Wynika stąd, że w punkcie 0 jest minimum, a w punkcie 2 maksimum. $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Stąd $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 1)$ i w tym przedziale funkcja jest wypukła oraz $f''(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$ i w tym przedziale funkcja jest wklęsła. Punktów przegięcia nie ma. Sporządzamy tabelkę:

x	$-\infty$	$\dots$	0	$\dots$	1^-	1^+	$\dots$	2	$\dots$	∞
$f'(x)$	-1	-	0	+	$+\infty$	$-\infty$	+	0	-	-1
$f''(x)$	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0 (min)	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	-4 (max)	$\searrow$	$-\infty$

PRZYKŁAD 5.23. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x.$$

Rozwiązanie.

Dziedzina = $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

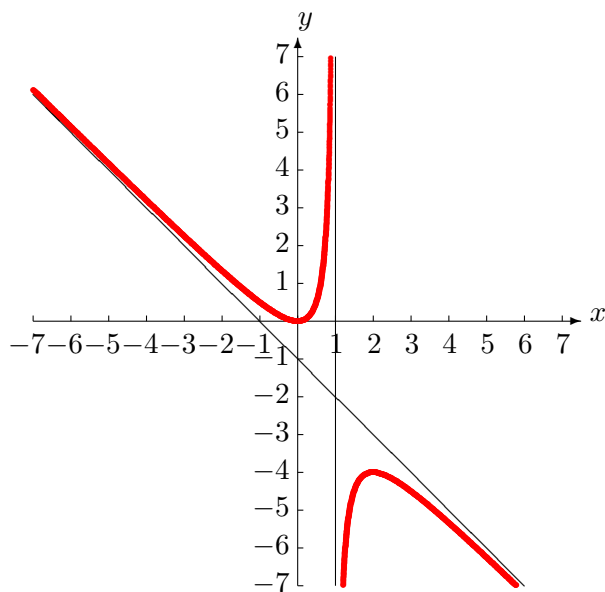
Funkcja jest wielomianem trzeciego stopnia, więc asymptot nie ma.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1.$$

$f'(x) = 0$ dla $x = 1$ i $x = \frac{1}{3}$. $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (1; \infty)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (\frac{1}{3}; 1)$.

$$f''(x) = 6x - 4.$$

$f''(x) = 0$ dla $x = \frac{2}{3}$ i $f''(x) > 0$ dla $x > \frac{2}{3}$ oraz $f''(x) < 0$ dla $x < \frac{2}{3}$. Sporządzamy tabelkę:



Rysunek 5.9. Wykres funkcji $y = \frac{x^2}{1-x}$

x	$-\infty$	$\dots$	$\frac{1}{3}$	$\dots$	$\frac{2}{3}$	$\dots$	1	$\dots$	∞
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+	+
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$ (max)	$\searrow$	$\frac{2}{27}$ punkt przebiegu	$\searrow$	0 (min)	$\nearrow$	∞

PRZYKŁAD 5.24. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = e^{-x^2/2}.$$

Rozwiązanie.

Dziedzina = $\mathbb{R}$. Funkcja jest parzysta i zawsze dodatnia.

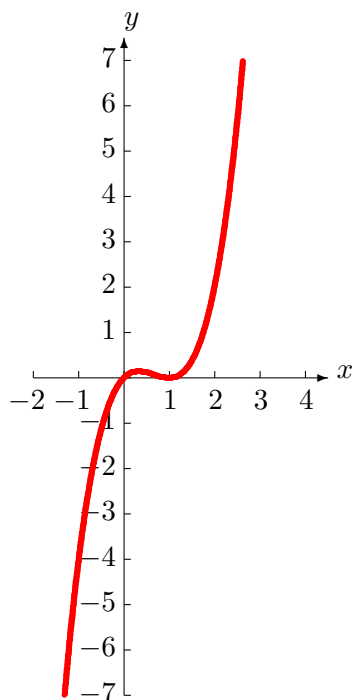
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

a zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą.

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Dla $x > 0$ pochodna jest ujemna, a dla $x < 0$ dodatnia oraz równa 0 w zerze.

$$f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Rysunek 5.10. Wykres funkcji $y = x^3 - 2x^2 + x$

$f''(x) = 0$ gdy $x = -1$ lub $x = 1$. $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ i $f''(x) < 0$ dla $x \in (-1; 1)$. Sporządzamy tabelkę:

x	$-\infty$	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	∞
$f'(x)$	+	+	+	+	0	-	-	-	-
$f''(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+	+
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ punkt przebiecia	$\curvearrowright$	1 (max)	$\curvearrowleft$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ punkt przebiecia	$\searrow$	0

ZADANIA

5.19. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

a) $f(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$;

b) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$;

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

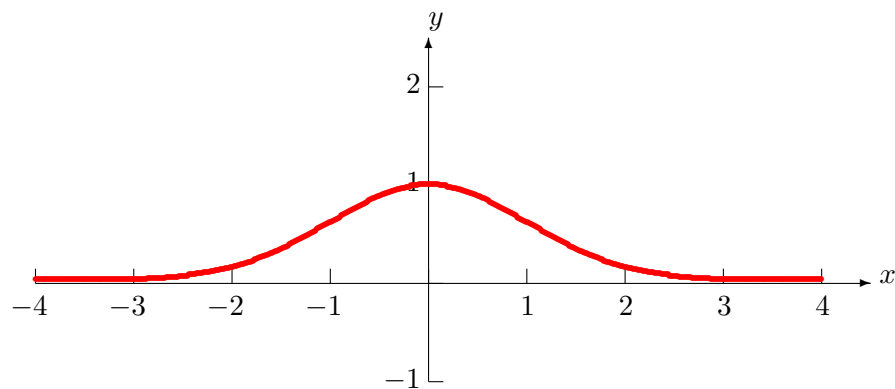
d) $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$;

e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

f) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$;

g) $f(x) = 2\ln x - x + 3$;

h) $f(x) = 3xe^x$;

Rysunek 5.11. Wykres funkcji $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

i) $f(x) = x \ln x$;

j) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;

k) $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}$;

l) $f(x) = \frac{x-1}{x}$;

m) $f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x+1}$;

n) $f(x) = x^3 + 3x + \frac{1}{x}$.

Rozdział 6.

Elementy rachunku całkowego

6.1. Całka nieoznaczona

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale $(a; b)$, skończonym lub nieskończonym. **Całką nieoznaczoną** z funkcji f nazywamy taką funkcję F określoną na tym samym przedziale, że $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a; b)$.

Funkcję F nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji f i zapisujemy

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Powyższy zapis czytamy „całka z f po dx ”.

PRZYKŁAD 6.1. Niech $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wówczas oczywiście F może być dowolną funkcją stałą $F(x) = c$. Wiemy też, że jeśli $F'(x) = 0$, to F musi być stała. Wynika stąd następująca ogólniejsza własność całkowania: jeśli F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f , to $F - G = 0$, oraz jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to również $F + c$ jest funkcją pierwotną funkcji f . $\square$

Nasuwa się pytanie, kiedy funkcja posiada funkcję pierwotną. Do naszych celów wystarczy informacja, że:

Każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną.

Z wzorów na pochodną otrzymamy następujące wzory:

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c, \text{ jeśli } a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c,$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0 \text{ i } a \neq 1),$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c.$$

Wzory na różniczkowanie sumy, iloczynu i funkcji złożonej prowadzą do następujących reguł całkowania:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Całkowanie przez części:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

Całkowanie przez podstawienie:

$$\int f(y(x)) y'(x) dx = \int f(y) dy, \text{ gdzie } y = y(x).$$

PRZYKŁAD 6.2. Obliczymy całkę $I = \int (2x^3 - 3x) dx$.

Korzystając z pierwszych dwóch reguł i z wzoru na całkę funkcji potęgowej mamy

$$I = 2 \int x^3 dx - 3 \int x dx = 2 \frac{1}{4} x^4 - 3 \frac{1}{2} x^2 + c = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2} x^2 + c. \quad \square$$

PRZYKŁAD 6.3. Obliczmy całkę $I = \int x e^x dx$.

Skorzystamy z wzoru na całkowanie przez części. Przyjmujemy $f = x$, $g' = e^x$, $f' = 1$, $g = e^x$. Mamy zatem

$$I = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = (x - 1) e^x + c. \quad \square$$

PRZYKŁAD 6.4. Obliczmy całkę $I = \int \frac{1}{3x - 5} dx$.

Skorzystamy ze wzoru na całkowanie przez podstawienie kładąc $y = 3x + 5$. Mamy wówczas $y' = \frac{dy}{dx} = 3$, czyli $dx = \frac{dy}{3}$. Zatem

$$I = \int \frac{1}{y} \frac{dy}{3} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{y} dy = \frac{\ln |y|}{3} + c = \frac{\ln |3x + 5|}{3} + c. \quad \square$$

PRZYKŁAD 6.5. W pewnym zakładzie koszty krańcowe (w tysiącach złotych na tonę) przy produkcji na poziomie x ton opisuje funkcja

$$f(x) = 3x^2 - 100x + 500.$$

Wiemy, że koszt całkowity produkcji pierwszej tony produktu wyniósł 700 tys. złotych. Jaki jest koszt całkowity wyprodukowania partii złożonej z 10 ton?

Rozwiązanie.

Koszt krańcowy jest pochodną kosztów całkowitych $K(x)$, czyli $K'(x) = f(x)$. Stąd

$$K(x) = \int (3x^2 - 100x + 500) dx = x^3 - 50x^2 + 500x + c.$$

Wiemy, że $K(1) = 700$, czyli $1 - 50 + 500 + c = 700$, skąd $c = 249$. Zatem $K(x) = x^3 - 50x^2 + 500x + 249$. Wstawiając $x = 10$ mamy $K(10) = 1000 - 5000 + 5000 + 249 = 1249$ tys. złotych. $\square$

ZADANIA

6.1. Obliczyć całki:

a) $\int (x^2 - 5x + 3) dx;$

b) $\int \frac{1}{x^2} dx;$

c) $\int x \cos x \, dx;$

d) $\int x^2 e^x \, dx;$

e) $\int \sqrt{3x-5} \, dx;$

f) $\int \ln x \, dx;$

g) $\int x \ln x \, dx;$

h) $\int \sin(5x-7) \, dx;$

i) $\int \operatorname{tg} x \, dx;$

j) $\int \operatorname{ctg} x \, dx;$

k) $\int e^{-3x} \, dx;$

l) $\int \frac{x+1}{x-1} \, dx.$

Rozwiązanie.

f) Zastosujemy regułę całkowania przez części przyjmując $f = \ln x$, $g' = 1$, $f' = 1/x$, $g = x$. Mamy

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \cdot (1/x) \, dx \\ &= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c. \quad \square \end{aligned}$$

i) Całkujemy przez podstawienie. Przyjmujemy $y = \cos x$. Wtedy $dy = -\sin x \, dx$, skąd $\sin x \, dx = -dy$, czyli $\operatorname{tg} x \, dx = \frac{\sin x \, dx}{\cos x}$. Zatem

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int (1/y)(-dy) = -\int (1/y) \, dy = -\ln |y| + c = -\ln |\cos x| + c. \quad \square$$

6.2. Całka oznaczona

Całką oznaczoną funkcji f w przedziale $[a; b]$ nazywamy różnicę $F(a) - F(b)$. Zapisujemy to w postaci $F(x) \Big|_a^b$, gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f . Oznaczamy ją

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

i czytamy „całka z f po dx od a do b ”. Funkcję f nazywamy *funkcją podcałkową*, liczbę a nazywamy *dolną granicą całkowania*, a liczbę b *górną granicą całkowania*. Prawdziwe są wzory:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

(całkowanie przez części),

$$\int_a^b f(y(x)) y'(x) dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy,$$

gdzie $y = y(x)$ (całkowanie przez podstawienie),

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ gdzie } c \in (a; b).$$

PRZYKŁAD 6.6. Obliczymy całkę $I = \int_2^3 6x^2 dx$.

$$I = 6 \int_2^3 x^2 dx = 6 \cdot (1/3)x^3 \Big|_2^3 = 2x^3 \Big|_2^3 = 54 - 16 = 38. \quad \square$$

PRZYKŁAD 6.7. Obliczymy całkę $I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$.

$$I = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -0 - (-1) = 1. \quad \square$$

PRZYKŁAD 6.8. Obliczmy całkę $I = \int_1^2 \sqrt{x+1} \, dx$.

Skorzystamy z wzoru na całkowanie przez podstawienie kładąc $y = x + 1$. Mamy $dy = dx$, $y(1) = 2$, $y(2) = 3$, zatem:

$$I = \int_2^3 \sqrt{y} \, dy = \int_2^3 y^{1/2} dy = (2/3)y^{(3/2)} \Big|_2^3 = (2/3)(\sqrt{27} - \sqrt{8}). \quad \square$$

6.3. Interpretacje całki oznaczonej

Interpretacja geometryczna. Przypuśćmy, że funkcja f jest nieujemna w przedziale $[a; b]$. Oznacza to, że jej wykres leży powyżej osi Ox . Całka oznaczona z funkcji f od a do b jest równa polu figury ograniczonej wykresem funkcji, osią Ox , prostą $x = a$ i prostą $x = b$. Rysunek 6.1. przedstawia wykres funkcji $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ w przedziale $[0.5; 4.5]$. Zatem pole zakropkowanej figury jest równe

$$\int_{0.5}^{4.5} ((x - 2)^2 + 1) dx =$$

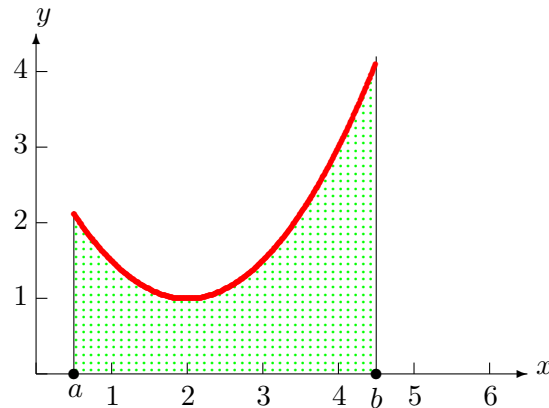
$$\left(\frac{1}{3}(x - 2)^3 + x \right) \Big|_{0.5}^{4.5} = \frac{1}{3}2.5^3 + 4.5 - \left[\frac{1}{3}(-1.5)^3 + 0.5 \right] = 10\frac{1}{3}. \quad \square$$

PRZYKŁAD 6.9. Obliczmy pole powierzchni figury ograniczonej krzywymi o równaniach $y = x$ i $y = x^2/3$. Rozwiązując równanie $x = x^2/3$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 3$), wnioskujemy, że pole naszej figury będzie różnicą całek (rysunek 6.2.):

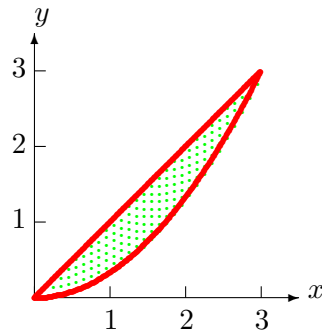
$$\int_0^3 x \, dx - \int_0^3 \frac{x^2}{3} dx.$$

Obliczając tę całkę otrzymamy wynik: pole równa się $3/2$. $\square$

Interpretacja ekonomiczna. Jeśli $f(x)$ opisuje koszty krańcowe w przedziale $[a; b]$, to całka $\int_a^b f(x) dx$ oznacza przyrost kosztów w przedziale



Rysunek 6.1.



Rysunek 6.2.

$[a; b]$. Podobną interpretację otrzymamy dla innych wielkości, jak: zysk, wielkość produkcji, cena itd.

PRZYKŁAD 6.10. Badania wykazały, że liczba ryb w stawie wzrasta w ciągu x miesięcy z prędkością $20 + \frac{x}{2}$ sztuk na miesiąc. O ile wzrośnie liczba ryb w ciągu roku?

Niech $R(x)$ oznacza liczbę ryb po x miesiącach. Mamy

$$R'(x) = 20 + \frac{x}{2}.$$

Stąd w ciągu roku liczba ryb wzrośnie o

$$R(12) - R(0) = \int_0^{12} \left(20 + \frac{x}{2}\right) dx = (20x + x^2) \Big|_0^{12} = 384. \quad \square$$

ZADANIA**6.2.** Obliczyć całki:

a) $\int_1^4 (x^2 - 2x + 1)dx;$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx;$

c) $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx;$

d) $\int_0^1 x e^x dx;$

e) $\int_4^5 \sqrt[3]{3x-5} \, dx;$

f) $\int_e^{e^2} \ln x \, dx;$

g) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx;$

h) $\int_0^4 2^x dx.$

6.3. Obliczyć pole zbioru ograniczonego krzywymi o równaniach:

a) $y = x^3$ i $y = x^4,$

b) $y = 3x - 1$ i $y = x^2 + 1,$

c) $y = \sin x, y = \cos x$ i $x = 0, x \in [0; \pi/2].$

6.4. Całka niewłaściwa

Jeśli zdarzy się, że istnieje

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

to mówimy, że istnieje *całka niewłaściwa pierwszego rodzaju* (istnieje też pojęcie *całki niewłaściwej drugiego rodzaju*, ale nie będziemy się nią zajmować). Oznaczamy ją

$$\int_a^\infty f(x) dx.$$

Analogicznie definiujemy całkę $\int_{-\infty}^b f(x)dx$. W szczególności może też istnieć $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

PRZYKŁAD 6.11. Całka $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ istnieje, bo istnieje granica

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} + 1 = 1. \quad \square$$

PRZYKŁAD 6.12. Całka $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ istnieje i jest równa

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{b} + 1 = 1. \quad \square$$

Całka niewłaściwa gra ważną rolę w wielu zastosowaniach. W rachunku prawdopodobieństwa i statystyce kluczowe znaczenie ma całka

$$F(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-x^2/2} dx.$$

Jest to tzw. dystrybuanta rozkładu normalnego. Nie istnieje algebraiczny wzór na funkcję F , tym niemniej można jej wartości obliczać w przybliżeniu przy pomocy komputera, albo szukać tych wartości w specjalnych tablicach.

ZADANIA

6.4. Sprawdzić czy istnieje całka niewłaściwa i obliczyć ją:

- | | |
|--|---|
| a) $\int_2^{\infty} \frac{2}{x^3} dx;$ | b) $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx;$ |
| c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx;$ | d) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx.$ |

Rozdział 7.

Elementy algebry liniowej

Podstawowy program z matematyki dla niektórych kierunków studiów (m. in. na kierunku ZARZĄDZANIE) obejmuje tylko rachunek macierzowy bez elementów teorii przestrzeni liniowych. Z drugiej strony związek tych dwóch teorii jest bardzo naturalny i ścisły. Liczne wzory i twierdzenia rachunku macierzowego stają się klarowne i jasne po zrozumieniu tego związku. Dlatego rozdział ten jest napisany w sposób szczególny. Można go czytać opuszczając wszystkie podrozdziały dotyczące przestrzeni liniowych (zaznaczone są one *) - otrzymujemy wówczas elementy teorii rachunku macierzowego, ale bez głębszych wyjaśnień niektórych wzorów. Natomiast czytając rozdział w całości dowiemy się czegoś o przestrzeniach liniowych (temat jest sam w sobie ciekawy i ma liczne zastosowania), ich związku z teorią macierzy i zrozumiemy skąd się niektóre wzory biorą.

7.1. Model liniowy rynku wielu dóbr

Wyobraźmy sobie model ekonomiczny rynku dwóch dóbr. Cenę, popyt i podaż pierwszego z nich oznaczmy odpowiednio przez x , P_1 i Q_1 , a drugiego y , P_2 , Q_2 . Załóżmy, że są one substytutami, i że funkcje popytu i podaży są funkcjami liniowymi zależnymi od cen obu dóbr:

$$\begin{aligned}P_1 &= p + ax + by, \\Q_1 &= q + cx + dy, \\P_2 &= r + ex + fy, \\Q_2 &= s + gx + hy.\end{aligned}$$

Gdzie $a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s$ są pewnymi stałymi. Z założenia, że towary te są substytutami wynika, że a, f powinny być ujemne, b, e dodatnie, natomiast d, g powinny być równe zeru lub bardzo bliskie zera. Istotnie, jeśli cena towaru rośnie, to popyt na ten towar maleje, natomiast gdy rośnie cena towaru podobnego, to wzrasta popyt na towar zastępczy. Natomiast podaż w niewielkim stopniu zależy od ceny drugiego towaru.

Chcemy wyznaczyć ceny równowagi rynkowej obu towarów, czyli takie wartości x i y , że $P_1 = Q_1$ i $P_2 = Q_2$. Po podstawieniu $a_{11} = a - c$, $a_{12} = b - d$, $a_{21} = e - g$, $a_{22} = f - h$, $b_1 = p - q$, $b_2 = r - s$ otrzymujemy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Jeśli będziemy rozpatrywać model z n dobrami, to podobne rozważania doprowadzą do układu n równań liniowych z n niewiadomymi.

Zajmiemy się badaniem, kiedy taki układ ma rozwiązania i w jaki sposób je otrzymać.

7.2. *Przestrzenie liniowe

DEFINICJA. Zbiór V nazywamy **przestrzenią liniową**, jeśli są na nim określone dwa działania: dodawanie $(+)$ przyporządkowujące dowolnym dwóm elementom $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ element $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$, oraz mnożenie przez skalar $(\cdot)$ przyporządkowujące liczbie $q \in \mathbb{R}$ oraz elementowi $\mathbf{x} \in V$ element $q\mathbf{x} \in V$, spełniające warunki:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,
3. istnieje element zerowy (oznaczany $\mathbf{0}$) w V taki, że dla każdego $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$,
4. dla każdego $\mathbf{x} \in V$ istnieje element przeciwny $-\mathbf{x}$ taki, że $-\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

$$5. q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = q\mathbf{x} + q\mathbf{y},$$

$$6. (q + r)\mathbf{x} = q\mathbf{x} + r\mathbf{x},$$

$$7. q(r\mathbf{x}) = (qr)\mathbf{x},$$

$$8. 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

dla wszystkich $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ oraz $q, r \in \mathbb{R}$.

Elementy przestrzeni liniowej nazywa się *wektorami*.

Zbiór

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

z działaniami określonymi następująco:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$q\mathbf{x} = q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (qx_1, qx_2, \dots, qx_n)$$

dla $q \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ jest przestrzenią liniową. Zerem w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest element $(0, 0, \dots, 0)$. Przestrzeń tę nazywamy ***n*-wymiarową przestrzenią euklidesową**. Wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będziemy ozna-

czać też następująco: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Zauważmy, że przy zapisie „poziomym”

stosujemy nawiasy okrągłe, a przy „pionowym” kwadratowe.

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ istnieje jeszcze jedno bardzo ważne działanie, tzw. *iloczyn skalarny*. Działanie to przyporządkowuje dwóm wektorom $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ pewną liczbę rzeczywistą $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ w następujący sposób:

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = ((x_1, \dots, x_n)|(y_1, \dots, y_n)) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

DEFINICJA. Zbiór $S \subset V$ nazywamy **bazą** przestrzeni V , jeśli każdy wektor $\mathbf{x} \in V$ daje się zapisać jednoznacznie jako suma

$$\mathbf{x} = q_1\mathbf{s}_1 + q_2\mathbf{s}_2 + \dots + q_k\mathbf{s}_k,$$

gdzie $\mathbf{s}_i \in S$ i liczby q_i są różne od zera.

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ bazą jest zbiór $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, gdzie

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

(na i -tym miejscu jedynka - poza tym same zera). Istotnie niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Jest oczywiste, że

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Przypuśćmy, że $\mathbf{x}$ jest też równe $q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + \dots + q_n \mathbf{e}_n$. Ale ostatnie wyrażenie jest równe wektorowi $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ skąd $q_1 = x_1, q_2 = x_2, \dots, q_n = x_n$. Wynika stąd że zbiór S jest bazą. Tą bazę nazywać będziemy bazą *standardową*.

Ale to nie jest jedyna baza w $\mathbb{R}^n$. Na przykład w $\mathbb{R}^2$ bazą jest też zbiór $S = \{(1, 1), (2, 3)\}$ (spróbuj to udowodnić). To, że ilość elementów i powyższej bazy i bazy standardowej w $\mathbb{R}^2$ jest równa 2 nie jest przypadkowe. Okazuje się bowiem, że

TWIERDZENIE. *Wszystkie bazy tej samej przestrzeni mają tyle samo elementów.*

Liczbę elementów bazy przestrzeni nazywamy **wymiarem** przestrzeni. Jeśli liczba ta jest skończona, to przestrzeń nazywa się *przestrzenią skończonego wymiaru*. Będziemy zajmować się wyłącznie takimi przestrzeniami, choć należy wspomnieć, że i *przestrzenie nieskończonego wymiaru* grają doniosłą rolę w matematyce i jej zastosowaniach.

Niech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ będą wektorami w przestrzeni V . Mówimy, że wektory te są **liniowo zależne**, jeśli istnieją liczby $q_1, \dots, q_n$, nie wszystkie równe zeru, takie że

$$q_1 \mathbf{x}_1 + \dots + q_n \mathbf{x}_n = 0.$$

Jeśli wektory nie są liniowo zależne, to mówimy, że są **liniowo niezależne**. Inaczej mówiąc, jeśli wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ są liniowo niezależne, to z powyższej równości musi wynikać $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$.

Wektory są liniowo zależne wtedy, gdy jeden z nich może być przedstawiony jako kombinacja liniowa pozostałych.

PRZYKŁAD 7.1. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wektory $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}$ są liniowo zależne, bo $\mathbf{u} = 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Natomiast wektory $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne, bo z faktu $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z} = \mathbf{0}$ wynikają równości $a + b = 0$, $b = 0$, $a + c = 0$, skąd $a = b = c = 0$. $\square$

7.3. *Przekształcenia liniowe

DEFINICJA. Niech X i Y będą przestrzeniami liniowymi. Przekształcenie $F : X \rightarrow Y$ nazywamy liniowym, jeśli dla wszystkich $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$

$$F(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aF(\mathbf{x}) + bF(\mathbf{y}).$$

W wypadku przekształcenia liniowego przyjęło się opuszczać nawiasy wokół pojedynczego argumentu przekształcenia. Zatem powyższy wzór można napisać

$$F(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aF\mathbf{x} + bF\mathbf{y}.$$

Aby określić przekształcenie liniowe wystarczy je określić na jakiegokolwiek bazie przestrzeni X . Jest to oczywiste i prześledźmy na przykładach jak wyglądają przekształcenia liniowe w przestrzeniach skończone wymiarowych.

PRZYKŁAD 7.2. Niech $X = \mathbb{R}^2$ i $Y = \mathbb{R}$. Niech F będzie przekształceniem liniowym takim, że $F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a$, $F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b$. Dowolny wektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ zapisuje się jako

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Z własności przekształcenia liniowego mamy

$$F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = xF \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + yF \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = ax + by.$$

Niech teraz a i b będą dwoma liczbami rzeczywistymi. Definiujemy $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ następująco:

$$F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax + by.$$

Widać, że F jest liniowe.

A zatem każde przekształcenie liniowe z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}$ możemy utożsamiać z parą dwóch liczb. $\square$

PRZYKŁAD 7.3. Analogicznie pokazać można, że każde przekształcenie liniowe F z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}$ możemy utożsamiać z układem n liczb $a_1, \dots, a_n$, przy czym

$$F \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n. \quad \square$$

PRZYKŁAD 7.4. Niech $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$. Dla każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ możemy $F\mathbf{v}$ zapisać jako $\begin{bmatrix} F_1 \mathbf{v} \\ \vdots \\ F_k \mathbf{v} \end{bmatrix}$, gdzie $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Łatwo można zauważyć, że każde z przekształceń F_i jest liniowe, czyli na mocy przykładu poprzedniego istnieją takie liczby $a_{i1}, \dots, a_{in}$, że

$$F_i \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n.$$

Zatem każde takie przekształcenie liniowe F jest związane z układem nk liczb. $\square$

I tak w naturalny sposób przechodzimy do następnego tematu.

7.4. Macierze

DEFINICJA. **Macierzą** o n wierszach i k kolumnach nazywamy układ nk liczb rzeczywistych zapisanych w postaci prostokątnej tabeli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}.$$

Macierz oznacza się też następująco:

$$A = [a_{ij}]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, k}.$$

W wypadku gdy macierz ma n wierszy i k kolumn będziemy pisać, że jest to macierz $n \times k$.

Układ liczb $a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ik}$ nazywamy i -tym wierszem macierzy A ,

a układ liczb $\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}$ nazywamy j -tą kolumną macierzy A .

Teraz omówimy operacje jakie możemy wykonywać na macierzach.

TRANSPONOWANIE

Macierzą transponowaną macierzy A nazywamy macierz oznaczaną A^T , której kolejne wiersze są kolejnymi kolumnami macierzy A . Zatem jeśli macierz A jest macierzą $n \times k$, to macierz A^T jest macierzą $k \times n$.

PRZYKŁAD 7.5. Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, to $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. $\square$

MNOŻENIE PRZEZ LICZBĘ

Jeśli A jest macierzą $n \times k$, a $q \in \mathbb{R}$, to możemy utworzyć macierz $qA = [c_{ij}]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, k}$, gdzie $c_{ij} = qa_{ij}$ dla każdego $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, k$.

PRZYKŁAD 7.6.

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 & 5 \cdot 5 & 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{bmatrix}. \quad \square$$

DODAWANIE

Jeśli obie macierze A i B są macierzami $n \times k$, to możemy utworzyć macierz $C = A + B = [c_{ij}]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, k}$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, dla każdego $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, k$.

PRZYKŁAD 7.7.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+7 \\ 3+3 & 4+8 \\ 5+1 & 6+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Dodawanie macierzy i mnożenie przez liczbę spełniają warunki

$$(q + r)A = qA + rA,$$

$$q(A + B) = qA + qB,$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

MNOŻENIE MACIERZY

Jeśli macierz A ma tyle samo kolumn ile wierszy ma macierz B , czyli A jest macierzą $n \times k$, a B jest macierzą $k \times p$, to możemy utworzyć macierz $A \cdot B = C = [c_{ij}]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, p}$, gdzie

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Inaczej mówiąc c_{ij} jest iloczynem skalarnym i -tego wiersza macierzy A i j -tej kolumny macierzy B .

Często opuszczamy znak $\cdot$ i piszemy zamiast $A \cdot B$ po prostu AB .

PRZYKŁAD 7.8. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Możemy wykonać działania zarówno AB jak i BA . Niech $AB = C$. Wówczas C będzie macierzą 2×2 .

Obliczając według powyższej recepty mamy

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20$$

$$c_{12} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 38$$

$$c_{21} = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 47$$

$$c_{22} = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 92.$$

Zatem $AB = \begin{bmatrix} 20 & 38 \\ 47 & 92 \end{bmatrix}$.

Natomiast macierz BA będzie macierzą 3×3 . Mamy:

$$\begin{aligned}
 BA &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 7 \cdot 4 & 4 \cdot 2 + 7 \cdot 5 & 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \\ 32 & 43 & 54 \end{bmatrix}. \quad \square
 \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 7.9. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Wtedy $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, natomiast $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\square$

WNIOSEK:

Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Natomiast prawdziwa jest rozdzielność mnożenia macierzy względem dodawania, czyli

$$(A+B)C = AC + BC \quad A(B+C) = AB+AC,$$

przy czym w pierwszej kolejności wykonuje się mnożenie, a potem dodawanie.

ZADANIA

7.1. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. Podać, które z poniższych

działań są wykonalne i wykonać je:

- | | |
|-------------------|-------------|
| a) AB^T ; | b) BA^T ; |
| c) $A^T B^T$; | d) CA ; |
| e) AC ; | f) AC^T ; |
| g) $(AB + C)^T$; | h) ABC . |

7.5. Macierze kwadratowe

Macierz mającą n wierszy i n kolumn nazywamy **macierzą kwadratową** stopnia n . Układ jej współczynników $a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn}$ nazywa się *główną przekątną*.

Macierze kwadratowe grają fundamentalną rolę w wielu zastosowaniach. Wśród macierzy kwadratowych wyróżnia się następujące:

Macierz symetryczna jest to taka macierz kwadratowa, że $A^T = A$. Dla macierzy symetrycznej muszą być spełnione zależności między współczynnikami $a_{ij} = a_{ji}$.

Macierz jednostkowa I_n jest to macierz, która ma na głównej przekątnej jedynki a poza tym same zera. Na przykład:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz jednostkowa ma następującą własność:

$$\boxed{IA = A \text{ oraz } BI = B,}$$

jeśli działania są wykonalne.

Macierzą diagonalną nazywamy macierz, której wszystkie współczynniki poza główną przekątną są równe zero. Macierz jednostkowa jest szczególnym przypadkiem macierzy diagonalnej, a macierz diagonalna szczególnym przypadkiem macierzy symetrycznej.

7.6. Wyznacznik macierzy kwadratowej

Zdefiniujemy pewną liczbę przypisaną macierzy kwadratowej A zwaną **wyznacznikiem**. W skrócie oznacza się ją: „ $\det A$ ” lub „ $|A|$ ”. Będziemy obu tych oznaczeń używać wymiennie. Najpierw zdefiniujemy wyznacznik dla macierzy A o jednym wierszu i jednej kolumnie. Niech $A = [a]$. Wtedy

$$\det A = \det[a] = a.$$

Przypuśćmy, że zdefiniowaliśmy już wyznacznik dla macierzy $(n-1) \times (n-1)$ i niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ będzie macierzą $n \times n$. Dla danych i i j ($1 \leq i, j \leq n$) niech A_{ij} oznacza macierz powstałą z macierzy A przez wykreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny. Na przykład gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, to $A_{11} = [5]$, $A_{12} = [4]$, $A_{21} = [3]$, $A_{22} = [1]$.

$$\text{Gdy } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \text{ to } A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

itd.

Niech teraz i będzie dowolną liczbą. Wówczas wyznacznik macierzy A definiujemy następująco:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

Wzór ten nazywa się **wzorem Laplace'a**. Okazuje się, że wynik nie zależy od wyboru liczby i . Ponadto prawdziwy jest wzór

$$|A^T| = |A|,$$

a zatem możemy we wzorze Laplace'a ustalić j i sumować względem i . Zatem prawdą jest, że

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

Pierwszy z powyższych wzorów jest nazywany rozwinięciem względem i -tego wiersza, a drugi rozwinięciem względem j -tej kolumny.

W wypadku macierzy 2×2 rozwijając powyższy wzór otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Natomiast w wypadku macierzy 3×3 wzór jest bardziej skomplikowany

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Powyższy wzór jest trudny do zapamiętania. Istnieje pewien graficzny schemat zwany **metodą Sarrusa** pozwalający stosunkowo sprawnie taki wyznacznik policzyć. Otóż postępujemy w następujący sposób:

1. Dopisujemy do macierzy z prawej strony pierwsze dwie kolumny.
2. Mnożymy przez siebie współczynniki na liniach ukośnych i bierzemy wynik z plusem dla linii biegnących z lewej strony do dołu i z minusem z lewej strony do góry.
3. Dodajemy do siebie 6 liczb uzyskanych w punkcie poprzednim.

PRZYKŁAD 7.10. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Obliczmy jej wyznacznik. Po dopisaniu pierwszych dwóch kolumn otrzymujemy zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{matrix}.$$

Linie ukośne biegnące z lewej strony w dół, to przekątne:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow -1 \rightarrow 1, \\ 2 &\rightarrow 0 \rightarrow 2, \\ 3 &\rightarrow 0 \rightarrow 3, \end{aligned}$$

a biegnące w górę, to przekątne:

$$\begin{aligned} 2 &\rightarrow -1 \rightarrow 3, \\ 3 &\rightarrow 0 \rightarrow 1, \\ 1 &\rightarrow 0 \rightarrow 2. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} |A| &= +1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 3 \\ &\quad - 2 \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 2 = -1 + 6 = 5. \quad \square \end{aligned}$$

Jeśli macierz kwadratowa ma więcej niż 3 wiersze, to nie istnieją już takie proste metody obliczania jej wyznacznika.

PRZYKŁAD 7.11. Obliczmy wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ze wzoru Laplace'a rozwijamy wyznacznik względem drugiego wiersza. Mamy

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot (-2) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -5 - 8 = -13. \quad \square \end{aligned}$$

Przytoczymy jeden bardzo ważny wzór. Jeśli A i B są kwadratowymi macierzami wymiaru $n \times n$, to

$$(7.1) \quad |AB| = |A| \cdot |B|.$$

ZADANIA

7.2. Obliczyć wyznacznik macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix};$

c) $\begin{bmatrix} 1/2 & 3 & 0 \\ 3/4 & 4/3 & 8 \\ 2/7 & 5/3 & 4/5 \end{bmatrix};$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

7.3. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$. Oblicz wyznacznik macierzy:

a) AB ;

b) BA^2 .

Wskazówka: skorzystaj z wzoru 7.1.

Wska-

7.7. *Wyznacznik jako przekształcenie na wektorach

Niech $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ będą wektorami w $\mathbb{R}^n$. Dla takiego układu wektorów rozpatrzmy macierz A , której j -ta kolumna pokrywa się z wektorem $\mathbf{v}_j$. Rozważmy przekształcenie oznaczane przez $\det$, które układowi n wektorów przyporządkowuje liczbę rzeczywistą następująco:

$$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det A.$$

Z wzoru Laplace'a na wyznacznik otrzymujemy następujące własności:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \alpha \mathbf{v}_j + \beta \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_n) \\ = \alpha \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_n) \\ + \beta \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_n), \end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_n) = -\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j+1}, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n),$$

$$\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1,$$

gdzie $\mathbf{e}_i$ jest wektorem mającym na i -tym miejscu jedynkę, a poza tym same zera.

Okazuje się, że powyższe trzy warunki jednoznacznie określają wyznacznik i one mogą też służyć za jego definicję.

Z warunku drugiego wynika, że jeśli jakieś dwa wektory układu $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ są takie same, to wyznacznik jest równy zero. Stąd i z warunku pierwszego wynika, że jeśli wektory są liniowo zależne, to również wyznacznik jest równy zero. Istotnie, jeśli wektory są liniowo zależne to jeden z nich można przedstawić jako kombinację liniową pozostałych. Wówczas wyznacznik rozłoży się na sumę składników i w każdym z tych składników jeden z wektorów będzie się powtarzał.

Podobnie możemy uzasadnić, że jeśli wektory są liniowo niezależne, to wyznacznik jest różny od zera.

Sformułujemy to w formie twierdzenia:

Twierdzenie. $\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ są liniowo zależne.

7.8. Rząd macierzy

Niech A będzie macierzą o n wierszach i k kolumnach. Poprzez usunięcie z macierzy pewnych wierszy i pewnych kolumn możemy otrzymać macierz kwadratową. Spośród tak powstałych macierzy kwadratowych wybieramy te, których wyznacznik jest różny od zera. Wśród nich istnieje taka, która jest największego stopnia (tzn. ma najwięcej wierszy i kolumn). Ten stopień nazywamy **rzędem** macierzy A . Zapiszmy to w formie jednego zdania.

Rząd macierzy A jest to największy stopień macierzy kwadratowej o wyznaczniku różnym od 0, utworzonej z macierzy A poprzez usunięcie pewnych wierszy i kolumn.

Przykład 7.12. Obliczmy rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Macierze kwadratowe które możemy otrzymać z macierzy A , to macierze $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$, $[5]$. Wyznacznik pierwszej z nich jest równy 0, ale drugiej -1 . Zatem macierz druga jest największą macierzą kwadratową utworzoną z macierzy A o wyznaczniku różnym od zera. Ponieważ ma ona dwa wiersze i dwie kolumny rząd macierzy A jest równy 2. $\square$

W szczególności jeśli A jest macierzą kwadratową $n \times n$, to rząd macierzy jest równy n wtedy i tylko wtedy gdy jej wyznacznik jest różny od zera.

ZADANIA

7.4. Obliczyć rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -10 \end{bmatrix};$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix};$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix};$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix};$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix};$$

$$\text{f)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix};$$

$$\text{g)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{h)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix};$$

$$\text{i)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{j)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \\ -2 & 15 & 3 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\text{k)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{l)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.9. Macierz odwrotna

Przypuśćmy, że dla danej macierzy A o n wierszach i n kolumnach istnieje taka macierz B (też $n \times n$), że $AB = BA = I_n$. Taką macierz B będziemy oznaczać A^{-1} .

PRZYKŁAD 7.13. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Znajdziemy macierz A^{-1} . Niech

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Mamy

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Przyrównując tę macierz do $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ c = 0 \\ d = 1. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $a = 1$, $b = -2$. Sprawdzamy jeszcze, że

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = I_2.$$

Zatem $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\square$

Okazuje się, że nie ma potrzeby sprawdzać ostatniej równości. Prawdą jest bowiem, że równości $AB = I$ i $BA = I$ są sobie równoważne.

Liczenie macierzy odwrotnej poprzez rozwiązywanie układów n^2 równań z n^2 niewiadomymi jest uciążliwe i wkrótce poznamy szybsze metody znajdowania macierzy odwrotnej.

Z wzoru (7.1) wynika, że

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

PRZYKŁAD 7.14. Niech $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$. Obliczyć wyznacznik macierzy BA^{-1} .

Rozwiązanie.

Mamy $\det A = 9$, $\det B = -2$. Stąd $\det A^{-1} = \frac{1}{9}$. Zatem

$$\det(BA^{-1}) = (-2) \cdot \frac{1}{9} = -\frac{2}{9}. \quad \square$$

7.10. *Macierze jako przekształcenia liniowe

Z każdą macierzą o n wierszach i k kolumnach możemy związać pewne przekształcenie liniowe F_A (patrz przykład 7.5). Związek ten jest nastę-

pujący: niech macierz $A = [a_{ij}]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, k}$ i niech $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$. Możemy

więc $\mathbf{x}$ potraktować jako macierz (oznaczymy ją dla odróżnienia od wektora przez X) o k wierszach i jednej kolumnie. Wówczas

$$F_A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = AX.$$

Ponieważ macierz AX ma n wierszy i jedną kolumnę, możemy ją potraktować jako wektor z $\mathbb{R}^n$.

Inaczej mówiąc działanie macierzy A na wektor $\mathbf{x}$ możemy opisać następująco: j -tą współrzędną wektora $A\mathbf{x}$ otrzymujemy mnożąc skalarnie j -ty wiersz macierzy A przez wektor $\mathbf{x}$.

PRZYKŁAD 7.15. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Wówczas $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 \\ 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $\square$

Zwykle nie będziemy odróżniać macierzy A o n wierszach i k kolumnach i odpowiadającego jej przekształcenia liniowego $F_A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ oznaczając oba obiekty wspólną literą A .

Bez trudu możemy zauważyć, że:

TWIERDZENIE. *Składaniu przekształceń liniowych odpowiada mnożenie odpowiadających im macierzy.*

Niech $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, \dots, k$) będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^k$, tzn. wektor $\mathbf{e}_i$ ma na i -tym miejscu jedynkę, a poza tym zera. Niech A będzie macierzą o n wierszach i k kolumnach, czyli przekształceniem liniowym z $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^n$.

Niech $\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$, czyli wektor utworzony z i -tej kolumny macierzy A .

Widać, że $\mathbf{v}_i = A\mathbf{e}_i$. Zatem przestrzeń $A(\mathbb{R}^k)$ jest przestrzenią rozpiętą na kolumnach macierzy A . Okazuje się, że *wymiar tej przestrzeni jest równy rzędowi macierzy A* . To może służyć zatem za inną definicję rzędu macierzy:

Rząd macierzy jest to wymiar przestrzeni rozpiętej na kolumnach tej macierzy.

Okazuje się, że w powyższym twierdzeniu można kolumny zastąpić wierszami i napisać:

Rząd macierzy jest to wymiar przestrzeni rozpiętej na wierszach tej macierzy.

7.11. Układy równań liniowych

Układem n równań liniowych o k niewiadomych nazywamy układ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nk}x_k = b_n. \end{cases}$$

Współczynniki układu tworzą macierz A o n wierszach i k kolumnach. Interesuje nas problem: kiedy taki układ ma rozwiązanie oraz jak to rozwiązanie wyznaczyć?

7.12. *Układ równań jako równanie wektorowe

Macierz A z poprzedniego podrozdziału potraktujemy jako przekształcenie liniowe z $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^n$. Oznaczmy przez $\mathbf{x}$ wektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$, a przez

$\mathbf{b}$ wektor $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Wówczas układ równań możemy zapisać w postaci jednego równania wektorowego

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Problem możemy zatem sformułować tak: *Mamy znaleźć w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ taki wektor $\mathbf{x}$, którego obraz przy przekształceniu A jest równy $\mathbf{b}$.*

Zastanówmy się, kiedy to jest możliwe. Otóż jest to możliwe wtedy, gdy wektor $\mathbf{b}$ należy do przestrzeni $A(\mathbb{R}^k)$. Ale przestrzeń $A(\mathbb{R}^k)$ jest to przestrzeń rozpięta na kolumnach macierzy A . Żeby zatem równanie miało rozwiązanie, to wektor $\mathbf{b}$ musi do tej przestrzeni należeć. Znaczy to, że dołączenie do kolumn macierzy A dodatkowo kolumny utworzonej z wektora $\mathbf{b}$ nie zwiększy rzędu macierzy. Otrzymujemy stąd poniższą własność.

7.13. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego

Na początek podamy definicję:

Macierzą rozszerzoną układu równań liniowych będziemy nazywać macierz otrzymaną z macierzy A poprzez dopisanie kolumny wyrazów wolnych.

TWIERDZENIE (Kroneckera-Capelliego). *Na to aby układ równań liniowych miał rozwiązanie, potrzeba i wystarcza aby rząd macierzy A i rząd macierzy rozszerzonej były takie same.*

Jeśli układ nie ma rozwiązań nazywamy go **sprzecznym**, jeśli ma dokładnie jedno rozwiązanie **cramerowskim**, a jeśli ma nieskończenie wiele rozwiązań - **nieoznaczonym**.

7.14. *Uzasadnienie wzorów Cramera

Jako szczególny przypadek rozpatrzmy układ n równań z n niewiadomymi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Jak już wiemy, możemy ten układ zapisać w postaci jednego równania wektorowego

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Macierz A jest macierzą kwadratową o n wierszach i n kolumnach. Układ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ma rozwiązanie dla każdego $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, jeśli obrazem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest przestrzeń $\mathbb{R}^n$, czyli gdy rząd macierzy A jest równy n . A to jest prawdą wtedy, gdy wyznacznik macierzy A jest różny od 0.

Przepiszmy nasze równanie wektorowe w postaci

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{b},$$

gdzie $\mathbf{v}_i$ jest wektorem utworzonym z i -tej kolumny macierzy A . Przenosząc $\mathbf{b}$ na lewą stronę otrzymujemy

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + (\mathbf{v}_i - \mathbf{b}) + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = 0.$$

Oznacza to, że układ wektorów

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, (x_i\mathbf{v}_i - \mathbf{b}), \dots, \mathbf{v}_n$$

jest liniowo zależny. Stąd wyznacznik macierzy utworzony z powyższych wektorów (jako kolumn) jest równy zeru. Z własności wyznacznika wynika, że

$$x_i \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Otrzymujemy stąd wzór na x_i

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

gdzie A_i jest macierzą, utworzoną z macierzy A poprzez zastąpienie i -tej kolumny wektorem $\mathbf{b}$. W ten sposób otrzymaliśmy rezultat.

7.15. Wzory Cramera

TWIERDZENIE. *Układ n równań z n niewiadomymi ma dokładnie jedno rozwiązanie dla każdego układu wyrazów wolnych $b_1, \dots, b_n$, wtedy i tylko wtedy gdy $\det A \neq 0$. Rozwiązanie to wyraża się wzorem:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

gdzie A_i jest macierzą, utworzoną z macierzy A poprzez zastąpienie i -tej kolumny kolumną $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Wzory te nazywają się **wzorami Cramera**, a układ n równań z n niewiadomymi spełniający warunek $\det A \neq 0$ nazywamy układem Cramera lub cramerowskim.

Z wzorów Cramera można stosunkowo łatwo otrzymać wzór na macierz odwrotną.

Oznaczmy elementy macierzy odwrotnej przez b_{ij} . Wówczas

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ij}^T}{\det A},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz powstałą z macierzy A po wykreśleniu i -tego wiersza i j -tej kolumny.

PRZYKŁAD 7.16. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Obliczyć A^{-1} .

Rozwiązanie.

Najpierw obliczamy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$. Następnie tworzymy macierz transponowaną $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ i obliczamy macierz odwrotną

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{1+2} \cdot 2 \\ (-1)^{2+1} \cdot 3 & (-1)^{2+2} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

PRZYKŁAD 7.17. Obliczymy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Mamy } |A| = 14. \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -3 & 5 & -6 \\ -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \quad \square$$

ZADANIA

7.5. Rozwiązać układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y = -1 \\ 2y - z = 1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 5y - z = 10 \\ 4x + y - 2z = -5 \\ -6x + 4y + z = 20. \end{cases}$$

7.6. Sprawdzić czy istnieje macierz odwrotna do danej macierzy i obliczyć ją, jeśli istnieje:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; & \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \\ \text{c) } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}; & \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

7.16. Model dochodu narodowego

Jako ilustrację wzorów Cramera opiszemy tu keynesowski model dochodu narodowego. W modelu tym występują następujące wielkości:

- y - dochód narodowy,
- x - wydatki konsumpcyjne,
- I_0 - inwestycje,
- R_0 - wydatki rządowe,
- a - autonomiczne wydatki na konsumpcję (wydatki niezależne od dochodu),

- b - krańcowa skłonność do konsumpcji (w modelu tym przyjmujemy, że b jest stałe).

Model opiera się na następujących równaniach:

$$(7.2) \quad y = x + I_0 + R_0.$$

Orzeka ono, że dochód jest całkowicie wykorzystany na wydatki konsumpcyjne, inwestycje i wydatki rządowe.

$$(7.3) \quad x = a + by.$$

To równanie stwierdza, że konsumpcja składa się z konsumpcji autonomicznej (niezależnej od dochodu), oraz z części dochodu przeznaczanej na konsumpcję.

Zapiszmy powyższe równania w postaci układu

$$\begin{cases} -x + y = I_0 + R_0 \\ x - by = a. \end{cases}$$

Zatem macierz układu - macierz A jest równa $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -b \end{bmatrix}$. Wyznacznik A jest równy $b-1$ i jest mniejszy od zera. Zatem układ jest cramerowski i możemy stosować wzory Cramera. Mamy

$$x = \frac{\begin{vmatrix} I_0 + R_0 & 1 \\ a & -b \end{vmatrix}}{b-1} = \frac{b(I_0 + R_0) + a}{1-b},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & I_0 + R_0 \\ 1 & a \end{vmatrix}}{b-1} = \frac{a + I_0 + R_0}{1-b}. \quad \square$$

7.17. *Przekształcenie odwrotne

Niech A będzie przekształceniem liniowym z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$ takim, że istnieje przekształcenie odwrotne A^{-1} , czyli $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Wiemy, że macierz odwrotna istnieje wtedy i tylko wtedy gdy $\det A \neq 0$. Rozważmy układ równań zapisany w postaci wektorowej

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Mnożąc obie strony z lewej strony przez A^{-1} dostajemy wzór

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Otrzymaliśmy zatem nowy sposób rozwiązywania układów równań. Możemy powyższy wzór rozisać na współrzędne, co omawiamy w następnym podrozdziale.

7.18. Rozwiązywanie układów równań przy pomocy macierzy odwrotnej

Przypuśćmy, że mamy układ Cramera

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Macierz układu oznaczmy przez A i potraktujmy niewiadome oraz wyrazy wolne jako macierze X i B o jednej kolumnie i n wierszach, czyli

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas ma sens mnożenie macierzy AX i układ możemy zapisać w postaci jednego równania macierzowego

$$AX = B.$$

Pomnóżmy to równanie z lewej strony przez macierz A^{-1} . Otrzymamy

$$X = A^{-1}B.$$

Współrzędne x_i otrzymanej macierzy X są rozwiązaniami układu.

PRZYKŁAD 7.18. Rozwiążemy metodą macierzy odwrotnej układ

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 5y = 7. \end{cases}$$

Wykorzystamy obliczoną już macierz odwrotną do macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Zatem $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X = A^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Stąd $x = -11$, $y = 8$. $\square$

Ta metoda rozwiązywania układów równań jest przydatna tam, gdzie musimy wielokrotnie rozwiązywać układy z takimi samymi współczynnikami a_{ij} i zmieniającymi się wyrazami wolnymi b_i .

ZADANIA

7.7. Rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 4y + 3z = 3 \\ -y + z = -1; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 4y + 3z = -1 \\ -y + z = 0; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ -y + z = -2. \end{cases}$$

7.19. Układy z różną liczbą niewiadomych i równań

Jeśli mamy jedno równanie liniowe z dwoma niewiadomymi, np.

$$x - 2y = 2,$$

to rozwiązań jest nieskończenie wiele. Zależą one od jednego parametru. Oznaczmy go przez t . Wówczas rozwiązania możemy zapisać $x = t$, $y = t/2 - 1$, ale również $y = t$, $x = 2t + 2$ jak i na wiele innych sposobów. Nasuwa się problem: od ilu parametrów będzie zależało rozwiązanie układu n równań z k niewiadomymi i jak znaleźć to rozwiązanie?

Prawdziwe jest następujące:

TWIERDZENIE. Niech $A = [a_{ij}]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, k}$ będzie macierzą o n wierszach i k kolumnach. Wówczas jeśli układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases}$$

ma rozwiązanie, to zależy ono od $(k - \text{rzęd } A)$ parametrów.

Jak znaleźć te parametry i rozwiązanie. Jeśli rząd jest równy p , to znaczy, że możemy wybrać p kolumn i p wierszy z macierzy A , tak, że odpowiadająca im macierz $p \times p$ ma wyznacznik różny od zera. Wybieramy teraz te równania z naszego układu, które odpowiadają wybranym wierszom. Następnie zostawiamy po lewej stronie wyrazy ze zmiennymi odpowiadającymi naszym wybranym kolumnom. Pozostałe składniki przenosimy na drugą stronę i właśnie te pozostałe $k - p$ zmienne będą naszymi parametrami. Ponieważ macierz po lewej stronie będzie miała wyznacznik różny od zera, możemy zastosować wzory Cramera, przy czym wyznaczniki występujące w liczniku będą zależały od $k - p$ parametrów.

Prześledzimy to na przykładzie.

PRZYKŁAD 7.19. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 4y - 3z = 3 \\ 3x + 6y - 2z = 7. \end{cases}$$

Rozwiązanie.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy najpierw czy układ ma rozwiązanie. Otóż rząd $A = 2$, bo $\det A = 0$, a np. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10$. Również rząd macierzy rozszerzonej jest równy 2. Zatem rozwiązanie będzie zależało od $3 - 2 = 1$ parametru. Ponieważ macierz kwadratowa (2×2) , której wyznacznik był różny od zera została utworzona z pierwszego i drugiego wiersza oraz drugiej i trzeciej kolumny, zostawiamy pierwsze i drugie równanie i po lewej stronie zostawiamy niewiadome y i z . Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2y + z &= 4 - x \\ 4y - 3z &= 3 - 2x. \end{cases}$$

Stosując wzory Cramera otrzymujemy:

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 4 - x & 1 \\ 3 - 2x & -3 \end{bmatrix}}{-10} = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2},$$

$$z = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 4 - x \\ 4 & 3 - 2x \end{bmatrix}}{-10} = 1,$$

$x \in \mathbb{R}$. $\square$

ZADANIA

7.8. Rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ x - 4y + 3z &= 3; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y - z &= 1 \\ -2x + y - 4z &= 3 \\ 3x - 3y + 3z &= -2; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z &= 4 \\ 2x + 4y - 3z &= 2 \\ 4x - 2z + t &= 1; \end{cases}$$

7.20. Rozwiązania bazowe

Jeśli układ jest nieoznaczony, to rozwiązań jest nieskończenie wiele. Jak już wiemy, rozwiązania zależą od $k - p$ parametrów, gdzie k jest liczbą niewiadomych, a p rzędem macierzy A . Jak widzieliśmy, p zmiennych pozostawiamy na lewej stronie i rozwiązujemy układ względem tych zmiennych, pozostałe traktując jako parametry. Zmienne pozostawione na lewej stronie będziemy nazywać **zmiennymi bazowymi**. Ponieważ rząd macierzy jest równy p , możemy wybrać p kolumn z macierzy w taki sposób, że macierz utworzona z tych kolumn i pewnych p wierszy będzie miała wyznacznik różny od zera. Zmienne odpowiadające tym wybranym kolumnom możemy wybrać jako bazowe.

PRZYKŁAD 7.20.

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 5 \\ x - y - z - 3t = 2. \end{cases}$$

Od ilu parametrów będzie zależało rozwiązanie? Jakie zmienne możemy wybrać jako bazowe?

Rozwiązanie.

Macierz A jest równa $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. Rząd A jest równy 2, bo np. wyznacznik utworzony z dwóch pierwszych kolumn, czyli kolumn odpowiadających zmiennym x i y równy $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ jest równy $-2 \neq 0$. Zatem zmienne bazowe są dwie. Jako zmienne bazowe możemy wybrać x i y . Zobaczmy, jakie inne pary zmiennych możemy wybrać jako bazowe.

Para x, z : liczymy $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$. Możemy.

Para x, t : liczymy $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = -6 \neq 0$. Możemy.

Para y, z : liczymy $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$. Możemy.

Para y, t : liczymy $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 0$. Nie możemy.

Para z, t : liczymy $\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$. Możemy. $\square$

Poznamy teraz ważną definicję:

Rozwiązanie, w którym zmienne niebazowe są równe zeru nazywamy rozwiązaniem bazowym.

PRZYKŁAD 7.21. Mamy dany układ równań:

$$\begin{cases} x - y + z - t = 5 \\ x - y - z - t = 2. \end{cases}$$

Znaleźć rozwiązanie ogólne tego układu i jakiekolwiek rozwiązanie bazowe.

Rozwiązanie.

Ponieważ macierz współczynników przy x i z ma wyznacznik różny od zera, zmienne x i z możemy wybrać jako bazowe.

Dodając stronami oba równania otrzymujemy $2x - 2y - 2t = 7$, czyli $x = \frac{7}{2} + y + t$.

Odejmując równania stronami otrzymujemy $2z = 3$, czyli $z = \frac{3}{2}$.

To jest rozwiązanie ogólne, w którym y i t są parametrami.

Rozwiązanie bazowe otrzymamy podstawiając $y = t = 0$, czyli $x = \frac{7}{2}$, $z = \frac{3}{2}$. $\square$

7.21. Operacje elementarne

Omówimy tu inną metodę znajdowania macierzy odwrotnej i rozwiązywania układów równań - przy pomocy tzw. operacji elementarnych.

Operacjami elementarnymi nazywamy:

1. Mnożenie i -tego wiersza macierzy przez dowolną liczbę różną od zera.
2. Dodanie do i -tego wiersza macierzy innego wiersza macierzy pomnożonego przez dowolną liczbę.
3. Zamianę miejscami dwóch dowolnych wierszy macierzy.

PRZYKŁAD 7.22. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Poprzez operacje elementarne przekształcić tę macierz w macierz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie.

Krok pierwszy: do pierwszego wiersza dodajemy wiersz drugi pomnożony przez $-1/3$ - operacja typu 2. Otrzymujemy macierz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Krok drugi: mnożymy pierwszy wiersz przez $3/2$ - operacja typu 1. Otrzymujemy macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Krok trzeci: do drugiego wiersza dodajemy pierwszy wiersz przemnożony przez -4 - operacja typu 2. Otrzymujemy macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Krok czwarty: mnożymy drugi wiersz przez $2/3$ - operacja typu 1. Otrzymujemy macierz B . $\square$

Słowne opisywanie operacji, które wykonujemy jest uciążliwe. Wprowadzimy pewne skrótowe opisy. Będziemy oznaczać i -ty wiersz macierzy przed wykonaniem operacji przez w_i , a i -ty wiersz macierzy po dokonaniu operacji przez w'_i . I tak na przykład pierwszą operację w powyższym przykładzie możemy zapisać następująco:

$$w'_1 = w_1 - \frac{1}{3}w_2.$$

Natomiast cały schemat rozwiązania zapiszemy tak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad w'_1 = w_1 - \frac{1}{3}w_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad w'_1 = \frac{3}{2}w_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad w'_2 = w_2 - 4w_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad w'_2 = \frac{2}{3}w_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Można było skrócić całą procedurę wykonując w jednym kroku kilka operacji elementarnych. Mogliśmy na przykład zapisać nasze rozwiązanie tak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} w'_1 &= w_1 - \frac{1}{3}w_2 \\ w'_1 &= \frac{3}{2}w_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} w'_2 &= w_2 - 4w_1 \\ w'_2 &= \frac{2}{3}w_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podamy teraz jak znajdować macierz odwrotną do macierzy A przy pomocy operacji elementarnych. Robimy to następująco:

1. Wypisujemy obok siebie macierz A i macierz jednostkową.
2. Przy pomocy operacji elementarnych przekształcamy macierz A w macierz jednostkową wykonując te same operacje na macierzy jednostkowej. Wówczas na miejscu macierzy jednostkowej otrzymamy macierz A^{-1} . (przyjęło się opuszczać nawiasy zostawiając tylko pionowe linie pomiędzy macierzami).

PRZYKŁAD 7.23. Przy pomocy operacji elementarnych znaleźć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \quad w'_2 = w_2 - 2w_1$$

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array} \quad w'_2 = \frac{1}{5}w_2$$

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \quad w'_1 = w_1 + w_2$$

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \quad w'_1 = \frac{1}{2}w_1$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}.$$

Odpowiedź: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$. $\square$

PRZYKŁAD 7.24. Przy pomocy operacji elementarnych znaleźć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad w'_2 = w_2 - \frac{3}{2}w_3$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad w'_1 = w_1 - 4w_2$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad w'_2 = w_2 + w_1$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -3 & 4\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad w'_3 = w_3 - 2w_2$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -3 & 4\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 & -8 \end{array} \quad \begin{array}{l} w'_1 = -w_1 \\ w'_2 = 2w_2 \\ w'_3 = \frac{1}{2}w_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -4 \end{array} .$$

Odpowiedź: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 2 & -6 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} . \quad \square$

7.22. Rozwiązywanie układów równań przy pomocy operacji elementarnych

Układy równań liniowych możemy rozwiązywać i przy pomocy operacji elementarnych. Jednocześnie ta metoda pozwala sprawdzać, czy układ jest cramerowski, sprzeczny, czy nieoznaczony.

Robimy to podobnie jak przy znajdowaniu macierzy odwrotnej, a mianowicie:

1. Wypisujemy obok siebie macierz układu i kolumnę wyrazów wolnych (daje to razem tzw. macierz rozszerzoną),
2. Przy pomocy operacji elementarnych przekształcamy powstałą w ten sposób macierz tak, aby na miejscu macierzy układu pojawiła

się macierz jednostkowa. Powstała nowa kolumna wyrazów wolnych da nam rozwiązanie układu.

PRZYKŁAD 7.25. Przy pomocy operacji elementarnych rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 4x - y = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie.

Wypisujemy macierz rozszerzoną i wykonujemy kolejne operacje elementarne:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \end{array} \quad w'_1 = w_1 + 2w_2$$

$$\begin{array}{cc|c} 9 & 0 & 9 \\ 4 & -1 & 1 \end{array} \quad w'_2 = w_2 - \frac{4}{5}w_1$$

$$\begin{array}{cc|c} 9 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} w'_1 = \frac{1}{9}w_1 \\ w'_2 = -w_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}.$$

Odpowiedź: $x = 1$, $y = 3$. $\square$

PRZYKŁAD 7.26. Przy pomocy operacji elementarnych rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 4x - y + z = 3 \\ x - y - z = -4. \end{cases}$$

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array} \quad w'_1 = w_1 + w_2$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array} \quad w'_2 = w_2 + w_3$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array} \quad w'_1 = w_1 + \frac{1}{2}w_2$$

$$\begin{array}{ccc|c} 7.5 & 0 & 0 & 7.5 \\ 5 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array} \quad w'_2 = 3w_2 - 2w_1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 7.5 & 0 & 0 & 7.5 \\ 0 & -6 & 0 & -18 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array} \quad w'_3 = w_3 - \frac{1}{6}w_2 - \frac{1}{7.5}w_1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 7.5 & 0 & 0 & 7.5 \\ 0 & -6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} w'_1 = \frac{1}{7.5}w_1 \\ w'_2 = -\frac{1}{6}w_2 \\ w'_3 = -w_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} .$$

Odpowiedź: $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$. $\square$

PRZYKŁAD 7.27. Przy pomocy operacji elementarnych stwierdzić, że układ

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 4x - y + z = 2 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$$

jest sprzeczny.

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{array} \quad w'_3 = w_3 - w_2 - w_1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} .$$

Macierzy układu nie da się doprowadzić do macierzy jednostkowej, bo trzeci wiersz jest zerowy. Równanie w trzecim wierszu jest sprzeczne, bo ma postać

$$0x + 0y + 0z = 1.$$

Zatem układ jest sprzeczny. $\square$

PRZYKŁAD 7.28. Przy pomocy operacji elementarnych stwierdzić, że układ

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 4x + y + z = 2 \\ 7x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

jest nieoznaczony i rozwiązać go.

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 7 \end{array} \quad w'_3 = w_3 - w_2 - w_1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Macierzy układu nie da się sprowadzić do macierzy jednostkowej, ale tym razem równanie w ostatnim wierszu jest tożsamością:

$$0x + 0y + 0z = 0.$$

Jest zatem spełnione przez dowolne liczby rzeczywiste. Wystarczy więc rozwiązać układ złożony z pierwszych dwóch równań. Robimy to w następujący sposób.

Wybieramy jedną ze zmiennych jako parametr. Niech to będzie z . W takim razie pierwsze dwie kolumny macierzy, czyli kolumny odpowiadające x -owi i y -owi doprowadzamy do macierzy jednostkowej.

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{array} \quad w'_1 = w_1 - 2w_2$$

$$\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{array} \quad w'_2 = 5w_2 + 4w_1$$

$$\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} w'_1 = -\frac{1}{5}w_1 \\ w'_2 = \frac{1}{5}w_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{14}{5} \end{array}.$$

A zatem

$$x + \frac{1}{5}z = -\frac{1}{5}$$

$$y + \frac{1}{5}z = \frac{14}{5}.$$

Stąd

$$x = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}z,$$

$$y = \frac{14}{5} - \frac{1}{5}z. \quad \square$$

ZADANIA

7.9. Przy pomocy operacji elementarnych oblicz macierz odwrotną do macierzy:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 10 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.10. Przy pomocy operacji elementarnych sprawdź, czy układ jest sprzeczny, cramerowski czy nieoznaczony:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 5y + 4z = 17 \\ 2x - y + z = 5 \\ y - z = 1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} & \begin{cases} x + 3y + 5z = 7 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x - 5y - 3z = -7; \end{cases} \\ \text{c)} & \begin{cases} x + y + z = 8 \\ 3x - y + z = 1 \\ 5x + y + 3z = 17. \end{cases} \end{aligned}$$

7.23. Model nakładów i wyników Leontiefa

Model ten opiera się na następujących założeniach:

1. Gospodarka składa się z n gałęzi.
2. Każda gałąź wytwarza jeden produkt.
3. Każda gałąź zużywa do produkcji wyroby wszystkich gałęzi w ustalonych proporcjach (być może równych zero).
4. Produkcja każdej gałęzi jest proporcjonalna do nakładów.

Oczywiście model taki daje tylko przybliżony opis rzeczywistości. Tym niemniej ma pewne doświadczalnie potwierdzone zalety.

Z powyższych założeń wynika, że ilość i -tego produktu niezbędna do wytworzenia ustalonej jednostki j -tego produktu jest wielkością stałą, równą a_{ij} . Załóżmy, że miarą jednostki jest ilość produktu warta ustaloną kwotę, np. jedną złotówkę. Wtedy np. równość $a_{34} = 0.14$ informuje nas o tym, że ilość trzeciego produktu o wartości 14 groszy jest niezbędna do wyprodukowania ilości czwartego produktu o wartości 1 złotego. Liczbę a_{ij} nazywamy *współczynnikiem nakładów*.

Wszystkie współczynniki nakładów tworzą macierz kwadratową A ($n \times n$). Kolumna j -ta tej macierzy informuje nas o nakładach potrzebnych do wytworzenia jednostki j -tego produktu. Oczywiście, aby produkcja tego dobra była ekonomicznie opłacalna suma współczynników w j -tej (a zatem w każdej) kolumnie musi być mniejsza od 1, czyli

$$\text{dla każdego } j = 1, \dots, n \quad a_{1j} + \dots + a_{nj} < 1.$$

Oprócz tego mamy jeszcze tzw. *popyt finalny* na i -ty produkt oznaczony przez p_i .

Zakładamy, że i -ta gałąź ma wytwarzać ilość produktu potrzebną do zaspokojenia produkcji we wszystkich gałęziach i popytu na ten i -ty produkt. Prowadzi to do układu równań;

$$x_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + p_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

czyli

$$-a_{i1}x_1 + \cdots + (1 - a_{ii})x_i + \cdots - a_{in}x_n = p_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Zapiszmy to w postaci macierzowej, traktując szukane zmienne $x_1, \dots, x_n$

jako macierz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ wymiaru $1 \times n$ a dane popytu finalnego jako ma-

cierz $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$ też wymiaru $1 \times n$. Macierz po lewej stronie ostatniego układu równań jest macierzą $I - A$, gdzie I jest macierzą jednostkową. Mamy zatem

$$(I - A)X = P,$$

skąd po przemnożeniu z lewej strony przez macierz $(I - A)^{-1}$ otrzymujemy wzór na rozwiązanie

$$X = (I - A)^{-1}P.$$

PRZYKŁAD 7.29. Zakładamy, że gospodarka składa się z dwóch gałęzi i że macierz współczynników nakładów jest następująca:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Suma elementów w obu kolumnach jest mniejsza od 1, a więc warunki są spełnione.

Macierz $I - A$ ma postać $\begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$. Odpowiedni układ równań ma postać:

$$\begin{cases} 0.8x_1 - 0.3x_2 = p_1 \\ -0.1x_1 + 0.6x_2 = p_2. \end{cases}$$

Świadomie nie wybraliśmy do tego przykładu za p_1 i p_2 konkretnych wartości liczbowych. Podkreślamy w ten sposób taką sytuację, w której macierz A jest stała (lub zmieniająca się bardzo powoli) - jej współczynniki wynikają bowiem ze sposobu i rodzaju organizacji produkcji. Natomiast popyt jest wielkością niezależną i mogącą nawet bardzo szybko się zmieniać.

Obliczamy macierz $(I - A)^{-1}$. Jest ona równa $\frac{1}{0.51} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$.

Zatem

$$x_1 = \frac{1}{0.51}(0.8p_1 + 0.1p_2),$$
$$x_2 = \frac{1}{0.51}(0.3p_1 + 0.6p_2). \quad \square$$

ZADANIA

7.11. Zakładamy że gospodarka składa się z dwóch gałęzi i macierz współczynników nakładów ma postać $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$. Natomiast popyt finalny na poszczególne produkty wynosi odpowiednio 11 i 5 (w miliardach złotych). Wyznaczyć potrzebną wielkość produkcji poszczególnych gałęzi.

7.12. Zakładamy że gospodarka składa się z trzech gałęzi i macierz współczynników nakładów ma postać $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$. Natomiast popyt finalny na poszczególne produkty wynosi odpowiednio 10, 4 i 5 (w miliardach złotych). Wyznaczyć potrzebną wielkość produkcji poszczególnych gałęzi.

Rozdział 8.

Funkcje wielu zmiennych

8.1. Pojęcie funkcji wielu zmiennych

Zacznijmy od przykładu. Przypuśćmy, że produkujemy z blachy pudełko w kształcie prostopadłościanu z dnem bez pokrywy górnej. Należy wyrazić objętość pudełka w zależności od jego wymiarów.

Niech podstawa prostopadłościanu (dno pudełka) ma wymiary x i y , a jego wysokość (głębokość) ma wymiar h . Wtedy $V = xyh$. Widzimy, że objętość zależy od trzech zmiennych x , y i h . Zapisujemy to tak:

$$V(x, y, h) = xyh.$$

A teraz wyrażmy funkcję B opisującą ilość zużytej blachy do wyprodukowania takiego pudełka. Niech z oznacza grubość blachy. Wtedy ilość zużytej blachy jest równa iloczynowi pola powierzchni P tego pudełka i grubości blachy. $P = xy + 2xh + 2yh$. Zatem

$$B(x, y, h, z) = P \cdot h = (xy + 2xh + 2yh) \cdot z.$$

B jest więc funkcją czterech zmiennych. $\square$

Przypominamy definicję:

DEFINICJA. Euklidesową przestrzenią n -wymiarową³ nazywamy zbiór wszystkich układów n liczb $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Przestrzeń tę oznaczamy $\mathbb{R}^n$, a jej elementy nazywamy wektorami.

³Ta przestrzeń pojawiła się już w poprzednim rozdziale, ale w części oznaczonej *.

Jeśli $n = 2$, to mamy do czynienia z płaszczyzną, a gdy $n = 3$, to z przestrzenią (trójwymiarową).

Jeśli $\mathbf{x}$ jest elementem $\mathbb{R}^n$ i $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, to liczbę x_i nazywamy *i-tą współrzędną wektora $\mathbf{x}$* .

W praktyce, gdy współrzędnych jest mniej (np. 2 czy 3) oznaczamy współrzędne różnymi literami, tak jak w poprzednich przykładach. Na płaszczyźnie współrzędne oznaczamy zwykle x i y , w przestrzeni trójwymiarowej x , y i z . W zastosowaniach jedną ze zmiennych jest często czas. Przyjęło się go oznaczać literą t .

Wprowadzimy teraz formalną definicję.

DEFINICJA. Funkcją n zmiennych nazywamy funkcję $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie A jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

W przykładzie (objętość pudełka) $n = 3$ (zmiennie oznaczaliśmy x , y , h), a zbiór A był zbiorem $\{(x, y, h) : x > 0, y > 0, h > 0\}$, bo długość, szerokość i głębokość pudełka muszą być dodatnie.

8.2. Dziedzina i wykres funkcji wielu zmiennych

Z podanej przed chwilą definicji wynika, że dziedzina funkcji jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$. W szczególności, gdy $n = 2$ możemy zbiór ten zaznaczyć na płaszczyźnie.

PRZYKŁAD 8.1. Funkcja dwóch zmiennych dana jest wzorem

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

Wyznaczyć dziedzinę funkcji f .

Rozwiązanie.

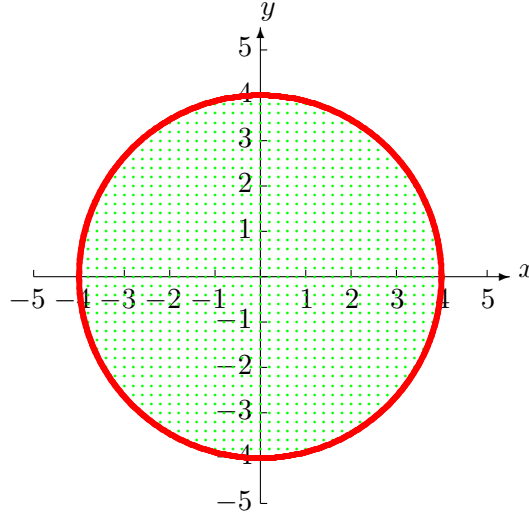
Pierwiastek kwadratowy możemy wyciągać z liczb nieujemnych. Stąd dziedziną funkcji f jest zbiór

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16 - x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

Oznacza to, że

$$x^2 + y^2 \leq 16.$$

Wnioskujemy stąd, że dziedziną funkcji jest koło o promieniu 4 i środku w punkcie $(0, 0)$ (rysunek 8.1.). $\square$



Rysunek 8.1. Dziedzina funkcji $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Wykresem funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest następujący zbiór:

$$\left\{ \left(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n) \right) : (x_1, \dots, x_n) \in D_f \right\}.$$

Wykres funkcji jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$. Jeśli $n = 2$, to wykres funkcji jest zawarty w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$.

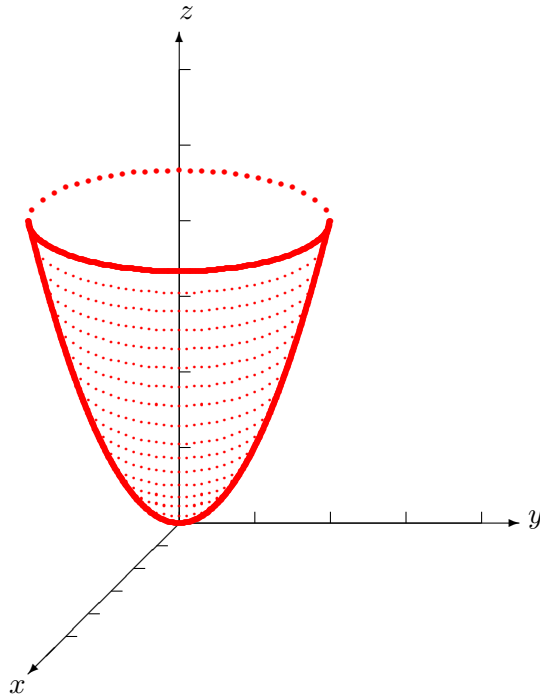
Opisujemy go zwykle w ten sposób, że dziedzinę funkcji umieszczamy na płaszczyźnie x, y , a wartości funkcji zaznaczamy na osi z . Możemy to zapisać w postaci zależności

$$z = f(x, y).$$

PRZYKŁAD 8.2. Niech

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Dziedziną funkcji jest cała płaszczyzna x, y . Rysunek 8.2. pokazuje wykres tej funkcji. Wykres ten jest powierzchnią zwaną paraboloidą. $\square$

Rysunek 8.2. Wykres funkcji $z = x^2 + y^2$

PRZYKŁAD 8.3. Niech f będzie funkcją z przykładu 8.1. Zależności pomiędzy $z = f(x, y)$ oraz x i y są następujące:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16,$$

oraz

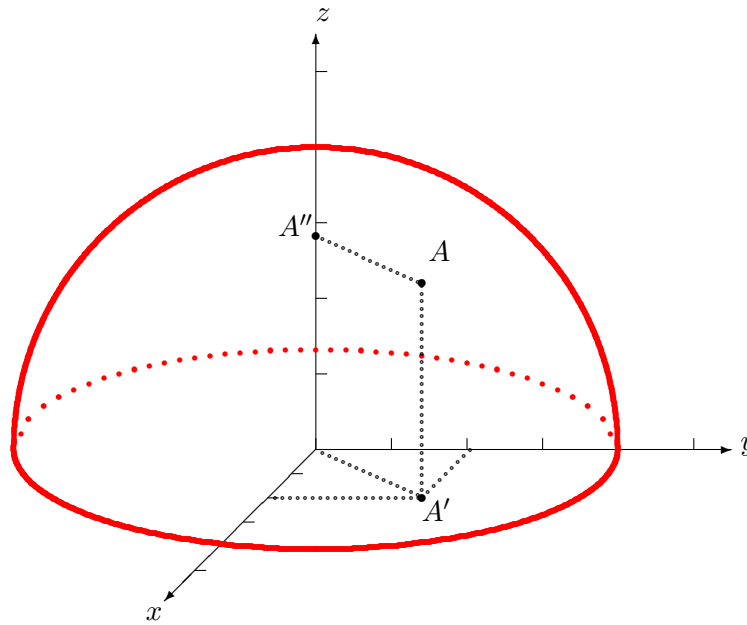
$$z \geq 0,$$

bo pierwiatek kwadratowy jest liczbą nieujemną.

Wnioskujemy stąd, że wykresem funkcji f jest górna połowa sfery o promieniu 4 i środku w punkcie $(0, 0, 0)$. $\square$

Widzimy to na rysunku 8.3.

Weźmy jakiś punkt z dziedziny funkcji, na przykład punkt $(x, y) = (2, 2)$. Na rysunku odpowiada mu punkt A' . Wówczas na wykresie funkcji, czyli na sferze odpowiednim punktem będzie punkt (x, y, z) , gdzie $z = f(x, y)$. W naszym przypadku $z = \sqrt{16 - 2^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$. Na rysunku punktem (x, y, z) jest punkt A mający współ-

Rysunek 8.3. Wykres funkcji $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

rzędne $(2, 2, 2\sqrt{2})$. Na osi Oz mamy punkt A'' będący rzutem punktu A na tę oś. Natomiast punkt A' jest rzutem punktu A na płaszczyznę x, y . $\square$

ZADANIA

8.1. Zaznacz na płaszczyźnie dziedzinę funkcji:

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - |x| - |y|}$;

b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

c) $f(x, y) = \ln(2x - 3y)$.

8.2. Niech $f(x, y) = 3x + 5y$. Wiemy, że punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, y_0, 3)$ należy do wykresu funkcji f . Obliczyć y_0 .

8.3. Poziomice funkcji

Poziomicą, inaczej zwaną też **warstwicą** funkcji nazywamy podzbiór dziedziny, na którym funkcja przyjmuje ustaloną wartość. Innymi

słowy poziomica, to następujący zbiór:

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f : f(x_1, \dots, x_n) = c\}.$$

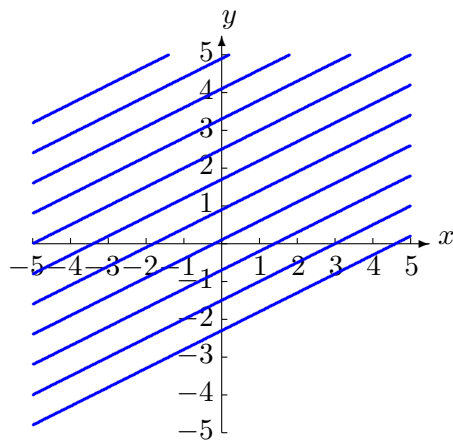
PRZYKŁAD 8.4. Niech $f(x, y) = -2x + 3y$. Wtedy dla ustalonego c poziomica jest zbiorem

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2x + 3y = c\}.$$

Ostatnie równanie jest równaniem prostej

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{c}{3}.$$

Poziomice są więc w tym wypadku równoległymi prostymi (rysunek 8.4.). $\square$



Rysunek 8.4. Poziomice funkcji $f(x, y) = x + 2y$

PRZYKŁAD 8.5. Niech $f(x, y) = y - x^2$. Wyznacz poziomicę funkcji f .

Poziomicami są zbiory postaci

$$\{(x, y) : y = x^2 + c\}.$$

Jest to zatem rodzina parabol jak na rysunku 8.5. $\square$

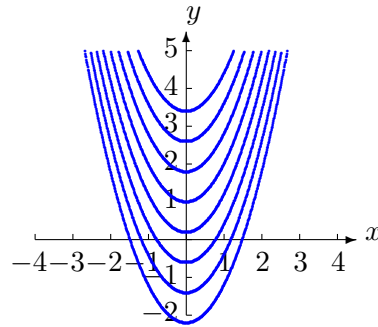
ZADANIA

8.3. Wykreśl poziomicę funkcji:

a) $f(x, y) = |x| - |y|;$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2;$

c) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}.$

Rysunek 8.5. Poziomice funkcji $f(x, y) = x^2 - y$

8.4. Ciągłość funkcji wielu zmiennych

Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ma współrzędne $(x_1, \dots, x_n)$. Niech $(\mathbf{x}_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) będzie ciągiem w $\mathbb{R}^n$ o współrzędnych odpowiednio $(x_1^k, \dots, x_n^k)$. Mówimy, że ciąg $(\mathbf{x}_k)$ zbiega do $\mathbf{x}$, jeśli dla każdego $i = 1, \dots, n$ ciąg liczbowy (x_i^k) zbiega do x_i .

Można to wyrazić słowami następująco:

Ciąg jest zbieżny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, jeśli jest zbieżny na każdej współrzędnej.

Niech $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Mówimy że funkcja f jest ciągła w punkcie $\mathbf{x}$ jeśli z tego, że $\mathbf{x}_k$ dąży do $\mathbf{x}$ wynika, że $f(\mathbf{x}_k)$ dąży do $f(\mathbf{x})$.

Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej prawdziwe są fakty:

*Suma, różnica, iloczyn i iloraz (pod warunkiem, że mianownik jest różny od zera) funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą;
Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

PRZYKŁAD 8.6. Funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana następująco:

$$f(x, y) = x^2 y^3,$$

jest ciągła jako iloczyn funkcji ciągłych. $\square$

PRZYKŁAD 8.7. Funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana następująco:

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2),$$

jest ciągła jako suma i złożenie funkcji ciągłych. $\square$

PRZYKŁAD 8.8. Funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana następująco:

$$f(x, y) = \frac{\cos(x - y)}{x^2 + y^2 + 1},$$

jest ciągła (dlaczego?). $\square$

8.5. Pochodne cząstkowe

Niech $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Oznaczmy punkt $\mathbf{x}$ przez $(x_1, \dots, x_n)$. Niech $1 \leq i \leq n$ i niech $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ będą ustalone. Niech g będzie funkcją jednej zmiennej zdefiniowaną następująco:

$$g(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Jeśli funkcja g ma pochodną $g'(t)$, to mówimy, że funkcja f ma **pochodną cząstkową** względem zmiennej x_i . Tę pochodną cząstkową oznaczamy symbolem f'_{x_i} i czytamy „*de f po de x_i*”. Inne stosowane oznaczenie pochodnej cząstkowej względem x_i to $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Pochodną cząstkową obliczamy traktując wszystkie zmienne poza zmienną x_i jako stałe.

PRZYKŁAD 8.9. Niech $f(x, y) = 3x + 2y$.

$$f'_x = 3,$$

$$f'_y = 2. \quad \square$$

PRZYKŁAD 8.10. Niech $f(x, y) = xy^2$.

$$f'_x = y^2,$$

$$f'_y = 2xy. \quad \square$$

PRZYKŁAD 8.11. Niech $f(x, y) = \cos(x + y^2)$.

$$f'_x = -\sin(x + y^2),$$

$$f'_y = 2y \cdot (-\sin(x + y^2)). \quad \square$$

PRZYKŁAD 8.12. Niech $f(x, y, z) = xy^2 + zx$.

$$f'_x = y^2 + z,$$

$$f'_y = 2xy,$$

$$f'_z = x. \quad \square$$

Pochodna cząstkowa funkcji f względem zmiennej x_i opisuje przybliżoną zmianę wartości funkcji f przy wzroście zmiennej x_i o jedną jednostkę i niezmiennych pozostałych zmiennych.

Podobnie jak w wypadku funkcji jednej zmiennej wprowadza się pojęcie **elastyczności cząstkowej** względem zmiennej x_i . Oznaczamy ją

$$E_{x_i} f.$$

Wartość elastyczności cząstkowej otrzymujemy z wzoru

$$E_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i \cdot f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)}.$$

Elastyczność cząstkowa względem zmiennej x_i opisuje procentową zmianę funkcji f przy przyroście zmiennej x_i o jeden procent i niezmiennych pozostałych zmiennych.

PRZYKŁAD 8.13. Obliczmy elastyczności cząstkowe funkcji

$$f(x, y) = x^2 y^3.$$

Mamy

$$\begin{aligned}f'_x &= 2xy^3, \\f'_y &= 3x^2y^2.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}E_x f &= 2xy^3 \frac{x}{x^2y^3} = 2, \\E_y f &= 3x^2y^2 \frac{y}{x^2y^3} = 3. \quad \square\end{aligned}$$

ZADANIA

8.4. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x, y) = x^2y^3$; | b) $f(x, y) = e^{3x+4y}$; |
| c) $f(x, y) = \cos(x^2 + 5y)$; | d) $f(x, y) = \frac{xy}{e^x}$; |
| e) $f(x, y) = \ln(e^x + y)$; | f) $f(x, y, z) = x^3y^2z$. |

8.5. Obliczyć elastyczności cząstkowe funkcji:

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x, y) = 4x + 3y$; | b) $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y}$; |
| c) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x + y}$; | d) $f(x, y, z) = 6x + 2yz^2$. |

8.6. Gradient funkcji

Dla danego punktu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ oraz funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mającej pochodne cząstkowe w punkcie $\mathbf{x}$, mamy układ n liczb:

$$f'_{x_1}(\mathbf{x}), f'_{x_2}(\mathbf{x}), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{x}).$$

Układ ten możemy potraktować jak wektor z przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Nazywamy go **gradientem** funkcji f w punkcie $\mathbf{x}$ i oznaczamy $\text{grad } f(\mathbf{x})$.

PRZYKŁAD 8.14. Niech $f(x, y) = x^2y^3$. Wówczas

$$\text{grad } f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2). \quad \square$$

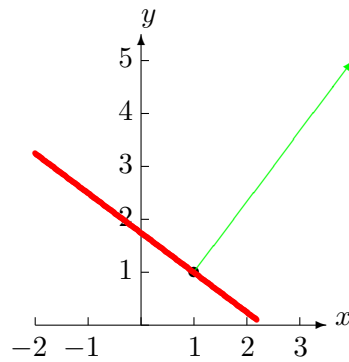
Interpretacja gradientu jest następująca:

Gradient funkcji opisuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji.

Związek pomiędzy poziomica i gradientem jest następujący:

Gradient jest prostopadły do poziomicy.

PRZYKŁAD 8.15. Niech $f(x, y) = 3x + 4y$. Znaleźć poziomice przechodzącą przez punkt $(1, 1)$. Obliczyć gradient funkcji w tym punkcie i sprawdzić, czy jest prostopadły do poziomicy.



Rysunek 8.6.

Rozwiązujemy równanie $3x + 4y = c$. Wstawiając $x = 1$ i $y = 1$ mamy $c = 7$. Zatem poziomica przechodząca przez punkt $(1, 1)$ to prosta o równaniu $3x + 4y = 7$.

$$\text{grad } f = (f'_x, f'_y) = (3, 4).$$

Wektor $(3, 4)$ jest prostopadły do prostej $3x + 4y = 7$ i ma długość $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (rysunek 8.7.). $\square$

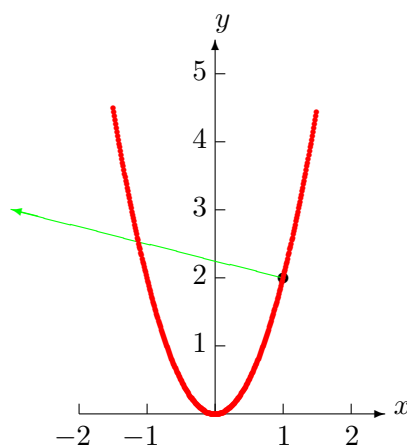
PRZYKŁAD 8.16. Niech $f(x, y) = y - 2x^2$. Wyznacz poziomice funkcji przechodzącą przez punkt $(1, 2)$ i gradient funkcji w tym punkcie.

Wstawiając do równania $y - 2x^2 = c$ wartości $x = 1$, $y = 2$ otrzymujemy $c = 0$. Zatem poziomica to parabola o równaniu $y = 2x^2$.

$$f'_x = -4x,$$

$$f'_y = 1.$$

Stąd $\text{grad } f(1, 2) = (-4, 1)$ (rysunek 8.7.). $\square$



Rysunek 8.7.

8.7. Zastosowanie pochodnych cząstkowych

Pochodne cząstkowe służą podobnie jak pochodne funkcji jednej zmiennej do wyznaczania największej i najmniejszej wartości funkcji.

Prawdziwe jest bowiem poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE. *Jeśli funkcja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ posiada pochodne cząstkowe i w pewnym punkcie przyjmuje maksimum lub minimum, to wszystkie pochodne cząstkowe w tym punkcie są równe zeru.*

Ograniczymy się do przykładów w przestrzeni dwu i trójwymiarowej. Mamy wtedy następującą sytuację:

1. *Funkcja ciągła określona na pewnej ograniczonej figurze lub bryle geometrycznej z brzegiem przyjmuje swoją największą i najmniejszą wartość.*

W sformułowaniu tym pojawia się pojęcie brzegu intuicyjnie dosyć oczywiste. Nie będziemy wprowadzać precyzyjnej matematycznej definicji brzegu. Podamy tylko czym jest brzeg w najważniejszych sytuacjach wystarczających do naszych celów: brzegiem wielokąta są jego boki, wielościanu jego ściany, brzegiem koła okrąg, ogólnie brzegiem figury płaskiej jest jej „obwód”, a brzegami brył ich powierzchnie.

2. Jeśli funkcja ta ma pochodne cząstkowe, to przyjmuje najmniejszą (największą) wartość albo na brzegu figury (bryły), albo w punkcie, w którym pochodne cząstkowe są równe zero.

Te dwa stwierdzenia pozwalają nam wyznaczać najmniejszą (największą) wartość funkcji określonej na pewnej figurze (bryle) według następującego schematu:

Krok 1. Obliczamy pochodne cząstkowe i przyrównujemy je do zera. W ten sposób wyznaczamy punkty stacjonarne (podejrzane o ekstremum).

Krok 2. Liczymy wartości funkcji w tych punktach.

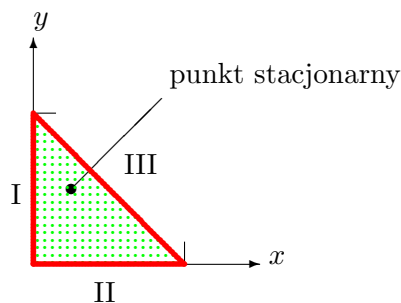
Krok 3. Wyznaczamy funkcję na brzegu figury i liczymy najmniejszą (największą) wartość funkcji na brzegu.

Krok 4. Spośród wszystkich wartości z punktów 2 i 3 wybieramy najmniejszą (największą).

PRZYKŁAD 8.17. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x - y$$

w trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$.



Rysunek 8.8.

Postępujemy według podanego schematu.

1. $f'_x = 4x - 1$, $f'_y = 2y - 1$. Przyrównując pochodne cząstkowe do zera otrzymujemy jeden punkt stacjonarny $(1/4, 1/2)$.

2. Obliczamy $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$.

3. Brzeg trójkąta składa się z trzech odcinków:

I) $x = 0$ i $0 \leq y \leq 1$. Na tym odcinku funkcja jest funkcją jednej zmiennej y i przybiera postać

$$g_1(y) = y^2 - y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Na końcach przedziału $[0; 1]$ funkcja przyjmuje wartość 0, a w wierzchołku ($y = 1/2$) wartość: $-1/4$. Największą wartością funkcji na tym odcinku jest 0, a najmniejszą: $-1/4$.

II) $y = 0$ i $0 \leq x \leq 1$. Tu funkcja jest funkcją jednej zmiennej x i przybiera postać

$$g_2(x) = 2x^2 - x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Postępując podobnie jak w punkcie I otrzymujemy, że tu największą wartością jest 1 a najmniejszą $-1/8$.

III) $0 \leq x \leq 1$ i $y = -x + 1$. Tu funkcja jest funkcją jednej zmiennej x i ma postać

$$g_3(x) = 3x^2 - 2x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Funkcja ta na końcach przedziału $[0; 1]$ przyjmuje wartości 0 i 1, a najmniejszą wartość otrzymamy w wierzchołku czyli w punkcie $x = 1/3$. Tam przyjmuje wartość: $-1/3$.

4. Porównujemy te wszystkie wartości i widzimy, że największą z nich jest 1 przyjmowana w punkcie $(1, 0)$, a najmniejszą: $-3/8$ przyjmowana w punkcie $(1/4, 1/2)$. $\square$

PRZYKŁAD 8.18. Pokazać, że ze wszystkich prostopadłościanów o danej objętości V najmniejsze pole powierzchni ma sześcian.

Oznaczmy dwie krawędzie prostopadłościanu przez x, y . Wówczas trzecia krawędź jest równa $\frac{V}{xy}$. Pole powierzchni jest równe

$$P(x, y) = 2xy + 2\frac{V}{y} + 2\frac{V}{x},$$

przy czym x i y mogą być dowolnymi liczbami dodatnimi. Zatem nasza funkcja jest określona na zbiorze $\{(x, y) : x > 0; y > 0\}$. Rozpatrzmy następujący kwadrat:

$$K_r = \left\{ \frac{1}{r} \leq x, y \leq r^2 \right\},$$

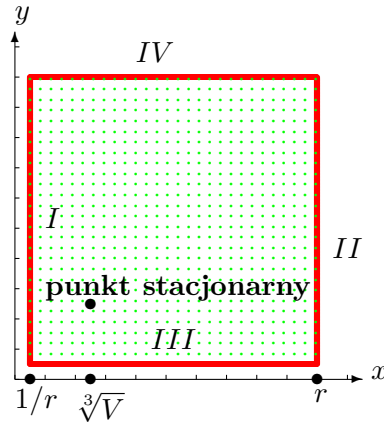
gdzie r jest pewną bardzo dużą liczbą (rysunek 8.9.).

Brzeg tego kwadratu składa się z czterech odcinków:

I) $\{x = \frac{1}{r}, \frac{1}{r} \leq y \leq r^2\};$

II) $\{x = r^2, \frac{1}{r} \leq y \leq r^2\};$

III) $\{y = \frac{1}{r}, \frac{1}{r} \leq x \leq r^2\};$



Rysunek 8.9.

IV) $\{y = r^2, \frac{1}{r} \leq x \leq r^2\}$.

Na drugim i czwartym z nich mamy nierówność

$$P(x, y) > 2xy \geq 2\frac{1}{r}r^2 = 2r.$$

Na pierwszym mamy nierówność

$$P(x, y) > \frac{V}{x} = Vr.$$

Na trzecim mamy nierówność

$$P(x, y) > \frac{V}{y} = Vr.$$

Widzimy więc, że dla dostatecznie dużego r funkcja na brzegu tego kwadratu przyjmuje bardzo duże wartości. Zatem najmniejszą wartość musi przyjąć w pewnym punkcie wewnątrz tego kwadratu. A więc pochodne cząstkowe w tym punkcie muszą być równe 0.

Obliczmy pochodne cząstkowe funkcji P :

$$P'_x = 2y - \frac{2V}{x^2},$$

$$P'_y = 2x - \frac{2V}{y^2}.$$

Przyrównujemy obie pochodne do zera i otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2y = \frac{2V}{x^2}, \\ 2x = \frac{2V}{y^2}. \end{cases}$$

Dzieląc pierwsze równanie przez drugie stronami otrzymujemy równanie

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Stąd $y = x = \sqrt[3]{V}$. Wywnioskowaliśmy zatem, że dla każdego dostatecznie dużego r funkcja P przyjmuje największą wartość w kwadracie K_r w punkcie $x = y = \sqrt[3]{V}$.

Wracamy teraz do zbioru $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. Przypuśćmy, że wartość funkcji P w tym zbiorze nie jest najmniejsza w punkcie $x = y = \sqrt[3]{V}$. Oznacza to, że istnieje punkt (x_0, y_0) taki, że

$$P(x_0, y_0) < P(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}).$$

Istnieje r takie, że $(x_0, y_0) \in K_r$. A to przeczy temu, że P przyjmuje najmniejszą wartość w kwadracie K_r w punkcie $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$. $\square$

PRZYKŁAD 8.19. A teraz rozwiążmy problem związany z naszym początkowym przykładem. Otóż wyznaczmy takie wymiary pudełka (bez pokrywki), żeby ilość zużytej blachy była najmniejsza.

W tym celu ze wzoru na objętość wyrazimy h poprzez zmienne x i y . Mamy $h = \frac{V}{xy}$. Zatem

$$B(x, y) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}.$$

Podobnie jak w przykładzie poprzednim zauważymy, że dla identycznych kwadratów K_r funkcja B przyjmuje na brzegu tego kwadratu bardzo duże wartości. Zatem osiąga minimum wewnątrz kwadratu. Obliczenie pochodnych czątkowych i przyrównanie ich do zera prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases} y = \frac{2V}{x^2}, \\ x = \frac{2V}{y^2}. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ identycznie jak poprzedni otrzymamy rozwiązanie $x = y = \sqrt[3]{2V}$ i $h = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} = \frac{1}{2}x$.

I to są optymalne wymiary naszego pudełka. Pole powierzchni tego pudełka jest równe

$$x^2 + 4xh = \sqrt[3]{4V^2} + 4\sqrt[3]{2V\frac{V}{4}} = 3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V^2}. \quad \square$$

PRZYKŁAD 8.20. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji

$$f(x, y) = 4x^2 + 5y^2 - x - y$$

w kwadracie $|x| \leq 7, |y| \leq 7$.

Rozwiązanie.

Policzmy pochodne cząstkowe funkcji

$$f'_x = 8x - 1,$$

$$f'_y = 10y - 1.$$

Przyrównując do zera i rozwiązując układ równań otrzymujemy jedyny punkt podejrzany o ekstremum $x = 1/8, y = 1/10$. Mamy:

$$f\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{20} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = -\frac{9}{80}.$$

A teraz poszukamy najmniejszej wartości funkcji na brzegu kwadratu, który składa się z 4 odcinków:

$$\text{I) } x = -7; |y| \leq 7,$$

$$\text{II) } x = 7; |y| \leq 7,$$

$$\text{III) } y = -7; |x| \leq 7,$$

$$\text{IV) } y = 7; |x| \leq 7.$$

Na pierwszym funkcja jest funkcją zmiennej y i ma postać

$$f_1(y) = 4 \cdot 49 + 5y^2 - 7 - y > 196 + 0 - 7 - 7.$$

Stąd

$$f_1(y) > 182.$$

Analogicznie na drugim odcinku

$$f_2(y) = 4 \cdot 49 + 5y^2 + 7 - y > 196 + 0 + 7 - 7 = 196.$$

Na trzecim odcinku funkcja zależy tylko od x i jest równa

$$f_3(x) = 4x^2 + 5 \cdot 49 - x - 7 > 0 + 245 - 7 - 7 = 231.$$

Podobnie na czwartym odcinku funkcja jest większa niż 245.

Zatem najmniejszą wartością jest: $-\frac{9}{80}$. $\square$

PRZYKŁAD 8.21. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$$

w kole $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rozwiązanie.

Obliczamy pochodne funkcji f :

$$f'_x = 4x,$$

$$f'_y = 2y - 1.$$

Przyrównując do zera otrzymujemy $x = 0$, $y = 1/2$. Ponieważ $0^2 + (1/2)^2 < 1$, nasz punkt znajduje się w kole. Mamy:

$$f\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Teraz policzymy najmniejszą i największą wartość funkcji na brzegu koła. Mamy tam $x^2 = 1 - y^2$. Wstawiamy do funkcji i otrzymujemy

$$g(y) = 2 - 2y^2 + y^2 - y = -y^2 - y + 2$$

przy czym $-1 \leq y \leq 1$. Aby policzyć najmniejszą i największą wartość tej funkcji na przedziale $[-1; 1]$ zróżniczkujemy ją. Mamy $g'(y) = -2y - 1$. Przyrównując do 0 mamy $y = -\frac{1}{2}$. Mamy $g(-\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{4}$. Jeszcze tylko pozostają do policzenia wartości funkcji na końcach przedziału $[-1; 1]$. Mamy $g(-1) = 2$, $g(1) = 0$. Porównując te 4 wartości otrzymujemy ostateczną odpowiedź:

Najmniejszą wartością jest: $-\frac{1}{4}$, największą: $2\frac{1}{4}$. $\square$

PRZYKŁAD 8.22. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y) = (x + 2y)e^{-x^2 - y^2}$ w $\mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie.

Policzmy pochodne cząstkowe funkcji f . Mamy:

$$f'_x = e^{-x^2 - y^2} - 2x(x + 2y)e^{-x^2 - y^2} = (1 - 2x^2 - 4xy)e^{-x^2 - y^2},$$

$$f'_y = 2e^{-x^2 - y^2} - 2y(x + 2y)e^{-x^2 - y^2} = (2 - 2xy - 4y^2)e^{-x^2 - y^2}.$$

Przyrównując pochodne do zera rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 1 - 2x^2 - 4xy &= 0, \\ 2 - 2xy - 4y^2 &= 0, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} 2x(x + 2y) &= 1, \\ 2y(x + 2y) &= 2. \end{cases}$$

Dzieląc te równania przez siebie mamy $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ czyli $y = 2x$. Stąd $10x^2 = 1$; a więc ostatecznie otrzymujemy 2 rozwiązania:

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}, y = \frac{2}{\sqrt{10}},$$

oraz

$$x = -\frac{1}{\sqrt{10}}, y = -\frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Mamy

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2},$$

oraz

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}.$$

Rozpatrzmy koło

$$K_M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq M^2\},$$

gdzie $M > 2$. Wtedy dla (x, y) leżącego na brzegu tego koła (czyli dla $x^2 + y^2 = M^2$) mamy

$$|x + 2y| \leq |x| + |2y| \leq 2(|x| + |y|) = 2\sqrt{(|x| + |y|)^2} = 2\sqrt{x^2 + 2|x||y| + y^2}.$$

Korzystając z tego, że $2|x||y| \leq x^2 + y^2$ mamy (dla $x^2 + y^2 = M^2$)

$$|x + 2y| \leq 2\sqrt{2(x^2 + y^2)} = 2\sqrt{2}M.$$

Zatem dla $x^2 + y^2 = M^2$

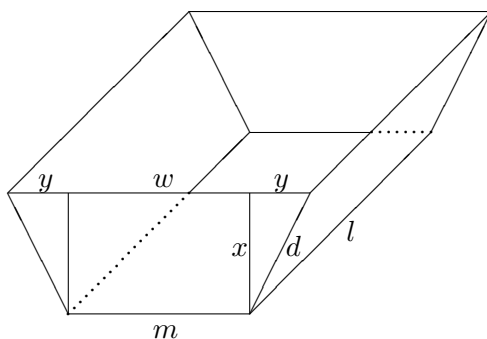
$$|f(x, y)| \leq 2\sqrt{2}Me^{-M^2}.$$

Jasne jest, że dla $M \rightarrow \infty$ wartość funkcji na brzegu tego koła dąży do 0 (wynika to z faktu, że funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż funkcja liniowa). Ponieważ w punkcie $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ wartość funkcji jest dodatnia, dla dostatecznie dużego M jest ona większa od wartości funkcji na brzegu koła K_M . Największa wartość jest więc przyjmowana wewnątrz koła. Analogicznie, ponieważ w punkcie $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ wartość funkcji jest

ujemna, dla dostatecznie dużego M wartość funkcji w tym punkcie jest mniejsza od wartości funkcji na brzegu koła K_M . Zatem i najmniejsza wartość jest przyjmowana wewnątrz tego koła. W punktach, w których jest maksimum i minimum przyjmowane pochodne cząstkowe muszą być równe zero. Ale jedynymi dwoma punktami, w których pochodne cząstkowe są równe zero są powyższe dwa punkty. W pierwszym z nich jest więc maksimum, a w drugim minimum i są to jednocześnie wartości: największa i najmniejsza. $\square$

Następny przykład może się wydać długi i żmudny. Warto go jednak prześledzić. Wyliczenia te są charakterystyczne dla wielu zagadnień optymalizacyjnych i mają szereg konkretnych zastosowań (np. przy budowie rowów melioracyjnych).

PRZYKŁAD 8.23. Mamy dany zbiornik w kształcie graniastosłupa prostokątnego o podstawie trapezu równoramiennego bez ściany bocznej położonego na przeciwległej ścianie. Zakładamy, że objętość tego zbiornika jest dana i równa V , oraz jego długość jest dana i równa l .



Rysunek 8.10.

Oznaczmy mniejszą podstawę trapezu przez m , większą przez w , wysokość trapezu przez x , a bok trapezu przez d . Niech $y = \frac{w-m}{2}$. Niech T oznacza pole powierzchni trapezu. Wtedy objętość zbiornika jest równa Tl . Stąd $T = \frac{V}{l}$ i jest stała. Ze wzoru na powierzchnię trapezu mamy

$$T = \frac{x(m+w)}{2} = \frac{x(2y+2m)}{2} = xy + xm.$$

Stąd

$$m = \frac{T}{x} - y.$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Pole powierzchni P zbiornika (bez górnej ściany) jest równe

$$P = 2T + ml + 2dl.$$

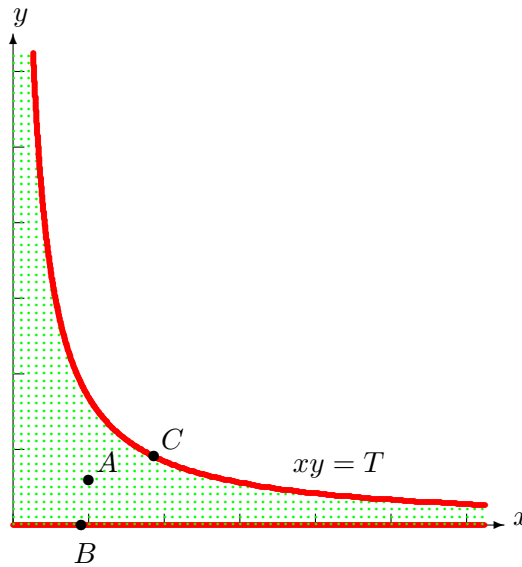
Wstawiając wzory na m i d otrzymamy

$$P = 2T + \frac{V}{x} - ly + 2l\sqrt{x^2 + y^2}.$$

P jest więc funkcją dwóch zmiennych x i y . Jakie warunki muszą spełniać x i y ? Otóż x musi być większe od zera, a y większe bądź równe zeru. Ponadto pole dwóch trójkątów prostokątnych o bokach x , y i d nie może przekraczać pola trapezu, czyli T . Zatem zbiór D_P , na którym określona jest funkcja P jest opisany następująco:

$$D_P = \{(x, y) : x > 0, y \geq 0, xy \leq T\}.$$

Widzimy to na rysunku 8.11.



Rysunek 8.11.

Znajdziemy punkt stacjonarny funkcji P . Mamy:

$$P'_x = -\frac{V}{x^2} + \frac{2lx}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$P'_y = -l + \frac{2ly}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Przyrównując pochodne do zera otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{V}{x^2} = \frac{2lx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ 1 = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Z drugiego równania otrzymujemy

$$x^2 + y^2 = 4y^2.$$

Stąd

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Wstawiając to do równania pierwszego, mamy:

$$\frac{V}{x^2} = l \frac{2x}{\sqrt{x^2 + \frac{x^2}{3}}}.$$

Stąd

$$V \sqrt{\frac{4}{3}x^2} = 2lx^3.$$

Ostatecznie po podniesieniu do kwadratu i podzieleniu przez $2l^2x^2$ otrzymujemy

$$x^4 = \frac{V^2}{3l^2}.$$

Zatem

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{V}{l}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{T}.$$

Stąd

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} \sqrt{T}.$$

Mamy zatem punkt stacjonarny

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{T}, \frac{1}{\sqrt[4]{27}} \sqrt{T} \right).$$

Sprawdzamy, czy punkt ten należy do zbioru D_P , czyli czy $x_0y_0 \leq T$. Mamy:

$$x_0y_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{T} \frac{1}{\sqrt[4]{27} \sqrt{T}} = \frac{1}{3} T < T.$$

Punkt stacjonarny należy do zbioru D_P . Na rysunku ten punkt oznaczony jest przez A .

Liczymy wartość funkcji P w punkcie stacjonarnym. Mamy:

$$P(x_0, y_0) = 2T + \frac{V}{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{T}} - l \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{T} + 2l\sqrt{\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}T} = 2T + 2\sqrt[4]{3}\sqrt{Vl}.$$

Pozostało wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji na brzegu zbioru D_P .

Zauważmy, że

$$-yl + 2l\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

Wynika z tego, że

$$P(x, y) \geq 2T + \frac{V}{x}.$$

Stąd przy zbliżaniu się do prostej $x = 0$ wartość funkcji P dąży do nieskończoności, jest więc bardzo duża.

Zobaczmy co dzieje się na prostej $y = 0$. Wówczas funkcja jest funkcją zmiennej x i przybiera postać

$$f(x) = 2T + \frac{V}{x} + 2lx,$$

przy czym $x \in (0; \infty)$. Obliczmy pochodną funkcji f . Mamy:

$$f'(x) = -\frac{V}{x^2} + 2l.$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy równanie

$$x^2 = \frac{V}{2l}.$$

Stąd mamy jeden punkt stacjonarny $x_1 = \sqrt{\frac{V}{2l}}$. Na rysunku jest to punkt B .

Wartość funkcji f w tym punkcie jest równa

$$f(x_1) = 2T + \frac{V}{\sqrt{\frac{V}{2l}}} + 2l\sqrt{\frac{V}{2l}} = 2\sqrt{2}\sqrt{Vl}.$$

Trzeba sprawdzić też końce przedziału $(0; \infty)$. Ponieważ przedział jest otwarty liczymy granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2T + \frac{V}{x} + 2lx = 2T + \infty + 0 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2T + \frac{V}{x} + 2lx = 2T + 0 + \infty = \infty.$$

Stąd najmniejszą wartością funkcji na prostej $y = 0$ jest wartość $2\sqrt{2}\sqrt{Vl}$.

Pozostała nam jeszcze część brzegu będąca krzywą $xy = T$. Na krzywej tej $y = T/x$ i funkcja jest funkcją jednej zmiennej x i przybiera postać

$$g(x) = 2T + \frac{V}{x} - \frac{lT}{x} + 2l\sqrt{x^2 + \frac{T^2}{x^2}} = 2T + 2l\sqrt{x^2 + \frac{T^2}{x^2}},$$

przy czym $x \in (0; \infty)$. Funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość tam, gdzie funkcja

$$g_1(x) = x^2 + \frac{T^2}{x^2}$$

przyjmuje wartość najmniejszą. Obie granice funkcji g_1 w 0^+ oraz w ∞ są równe nieskończoności. Szukamy punktu stacjonarnego:

$$g'_1(x) = 2x - \frac{2T^2}{x^3}.$$

Przyrównujemy pochodną do zera i otrzymujemy rozwiązanie $x_2 = \sqrt{T}$. Na rysunku jest to punkt C . W tym punkcie wartość funkcji g_1 jest najmniejsza. Zatem i wartość funkcji g jest najmniejsza w tym punkcie. Liczymy wartość funkcji g w punkcie x_2 :

$$g(x_2) = 2T + 2l\sqrt{T^2 + \frac{T^2}{T}} = 2T + 2l\sqrt{2\frac{V}{l}} = 2T + 2\sqrt{2}\sqrt{Vl}.$$

Jak widzimy jest to taka sama wartość, jak najmniejsza wartość na prostej $y = 0$. Teraz pozostaje nam tylko porównać dwie wartości:

$$2T + 2\sqrt{2}\sqrt{Vl} \quad \text{ i } \quad 2T + 2\sqrt[4]{3}\sqrt{Vl}.$$

Podnosząc do czwartej potęgi liczby $2\sqrt{2}$ oraz $2\sqrt[4]{3}$, otrzymujemy nierówność

$$16 \cdot 4 > 16 \cdot 3.$$

Wynika stąd, że druga wartość jest mniejsza.

Policzmy pozostałe wymiary zbiornika:

$$m = \frac{T}{x} - y = \sqrt[4]{3}\sqrt{T} - \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{T} = \frac{2}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{T}.$$

Widzimy stąd, że m powinno być dwa razy większe od y .

$$w = m + 2y = 2m = \frac{4}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{T}.$$

Dłuższa podstawa trapezu powinna być dwa razy większa od krótszej.

Otrzymujemy ostateczną odpowiedź - wymiary zbiornika powinny być następujące:

wysokość trapezu: $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{T}$,

krótsza podstawa trapezu: $\frac{2}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{T}$,

dłuższa podstawa trapezu: $\frac{4}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{T}$.

Widzimy stąd, że tangens kąta nachylenia bocznej ściany do podstawy wynosi $y/x = \sqrt{1/3}$. Ponieważ kąt ten jest rozwarty, to jest równy 120° . $\square$

Powyższe rozwiązanie jest wykorzystywane przez budowniczych rowów melioracyjnych. Są one budowane właśnie tak, że ich przekrój jest trapezem równoramiennym o mniej więcej takich wymiarach jakie obliczyliśmy. Chodzi bowiem o to, aby był pewien z góry zadany przepływ wody w ciągu sekundy, co odpowiada naszej objętości V i długości l , i aby siła tarcia wody o ściany rowu była jak najmniejsza, czyli aby powierzchnia tych ścian była możliwie mała.

* **PRZYKŁAD 8.24.** Teraz dopuścimy, że również długość zbiornika nie musi być ustalona, ale dowolna. Wówczas nasza funkcja P jest funkcją trzech zmiennych x , y i l i wyraża się wzorem:

$$P(x, y, l) = \frac{2V}{l} + \frac{V}{x} - yl + 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Warunki jakie muszą spełniać zmienne x , y , l są następujące:

$$x > 0, y \geq 0, l > 0, xyl \leq V.$$

Pochodne względem x i y są identyczne jak w poprzednim przykładzie, zaś pochodna względem l wyraża się wzorem:

$$P'_l = -\frac{2V}{l^2} - y + 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Przyrównując pochodne cząstkowe do zera otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} V\sqrt{x^2 + y^2} = 2x^3l, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2y, \\ 2V = l^2(y - 2\sqrt{x^2 + y^2}). \end{cases}$$

Z drugiego równania otrzymujemy podobnie jak w poprzednim przykładzie $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Wstawiając do pierwszego i trzeciego otrzymamy układ:

$$\begin{cases} V = x^2 l \sqrt{3}, \\ 2V = \sqrt{3} l^2 x. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy:

$l = \frac{V}{h^2 \sqrt{3}}$ i ostatecznie jeden punkt stacjonarny (x_0, y_0, l_0) o współrzędnych:

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\sqrt{3}}},$$

$$l_0 = \sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}},$$

$$y_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\frac{V}{18}}.$$

Obliczając wartość funkcji P w punkcie stacjonarnym otrzymamy

$$P(x_0, y_0, l_0) = 3 \sqrt[3]{2\sqrt{3}} \sqrt[3]{V^2}.$$

Teraz rozważymy funkcję P na brzegu zbioru. Z postaci funkcji wynika, że jeśli $x \rightarrow 0^+$ i $l \rightarrow 0^+$, to wartość funkcji dąży do nieskończoności - a więc jest bardzo duża. Pozostały nam dwie pozostałe części brzegu: płaszczyzna $y = 0$ oraz powierzchnia $xyz = V$.

Jeśli $y = 0$, to zbiornik jest prostopadłościanem o danej objętości V i zadanie sprowadza się do przykładu 8.19. Z rozwiązania tego przykładu wynika, że najmniejsza wartość funkcji P przy $y = 0$ wynosi $3 \sqrt[3]{4} \sqrt[3]{V^2}$.

Na powierzchni $xyz = V$ podstawiamy $l = \frac{V}{xy}$ i otrzymujemy funkcję dwóch zmiennych x i y

$$f(x, y) = 2xy = \frac{2V \sqrt{x^2 + y^2}}{xy},$$

gdzie $0 < x, y < \infty$.

Jeśli rozważymy zbiór

$$D_M = \{(x, y) : x > 0, y > 0, xy < M\},$$

gdzie M jest ustaloną liczbą (bardzo dużą), to zauważymy, że zarówno przy zbliżaniu się do prostej $x = 0$ jak i $y = 0$ wartość funkcji f dąży do nieskończoności, natomiast dla $xy = M$, $f(x, y) > M$. Możemy wywnioskować, że wartość funkcji f na

brzegu zbioru D_M jest bardzo duża. Najmniejszą wartość przyjmuje więc w punkcie stacjonarnym. Obliczając pochodne cząstkowe funkcji f otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'_x &= 2y \left(1 - \frac{V}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot x^2} \right), \\ f'_y &= 2x \left(1 - \frac{V}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot y^2} \right). \end{aligned}$$

Przyrównując je do zera otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} V = \sqrt{x^2 + y^2} x^2, \\ V = \sqrt{x^2 + y^2} y^2. \end{cases}$$

Stąd mamy jeden punkt stacjonarny $x_1 = y_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{\sqrt{2}}}$.

Obliczając wartość funkcji f w tym punkcie otrzymujemy:

$$f(x_1, y_1) = 3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V^2}.$$

Porównując trzy wartości (dwie z nich są takie same) i zauważając, że $2\sqrt{3} < 4$ wnioskujemy, że najmniejszą wartość funkcja P przyjmuje w punkcie

$$(x_0, y_0, l_0) = \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\sqrt{3}}}, \sqrt[3]{\frac{V}{18}}, \sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}} \right). \quad \square$$

ZADANIA

8.6. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = 3xy - 5x - 6y + 2$$

w kwadracie o wierzchołkach $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ i $(2, 2)$.

8.7. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y$$

w prostokącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$ i $(2, 0)$.

8.8. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji

$$f(x, y) = x + \frac{1}{xy} + 2y$$

w kwadracie o wierzchołkach $(0.1, 0.1)$, $(10, 0.1)$, $(0.1, 10)$ i $(10, 10)$.

8.9. * Budujemy namiot (np. cyrkowy) w kształcie walca z dachem w kształcie stożka. Objętość namiotu ma być równa V . Jakie powinny być wymiary namiotu (promień podstawy r , wysokość walca h i wysokość stożka s), aby ilość zużytego materiału była najmniejsza?

8.8. Model dochodu narodowego

Opiszemy tu model uwzględniający trzy podstawowe wielkości: dochód narodowy, konsumpcję i podatki.

Wielkości rozważane w tym modelu to:

- y - dochód narodowy;
- x - konsumpcja;
- z - podatki;
- I - inwestycje;
- G - wydatki rządowe;
- a - konsumpcja autonomiczna (niezależna od dochodów), $a > 0$;
- b - krańcowa skłonność do konsumpcji (zakładamy, że b jest stałe);
- c - stopa podatku dochodowego, $c \in (0; 1)$;
- d - stała część podatków, niezależna od dochodów, $d > 0$.

Model opisują trzy równania:

$$(8.1) \quad y = x + I + G,$$

$$(8.2) \quad x = a + b(y - z),$$

$$(8.3) \quad z = d + cy.$$

Pierwsze równanie orzeka, że dochód jest spożytkowany na konsumpcję, inwestycje i wydatki rządowe. Drugie równanie stwierdza, że konsumpcja składa się z konsumpcji stałej i z części dochodu przeznaczanego na konsumpcję. Trzecie równanie mówi, że podatki składają się z podatków niezależnych od dochodu i podatków proporcjonalnych do dochodu.

Rozwiążemy ten układ względem y . Przepiszemy go w postaci

$$\begin{cases} -x + y = I + G \\ x - by + bz = a \\ -cy + z = d \end{cases}$$

i zastosujemy wzory Cramera. Macierz A jest równa $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -b & b \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix}$.

Jej wyznacznik jest równy: $-1 + b - cb$.

Natomiast macierz A_y równa się $\begin{bmatrix} -1 & I + G & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & d & 1 \end{bmatrix}$.

Wyznacznik macierzy A_y jest równy: $-a + bd - I - G$. Stąd dochód równowagi y_0 jest równy:

$$y_0 = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{a - bd + I + G}{1 - b + bc}.$$

Możemy y_0 potraktować jako funkcję sześciu zmiennych: a, b, c, d, I oraz G .

Możemy więc obliczyć sześć pochodnych cząstkowych. Trzy z nich grają ważną rolę w podejmowaniu decyzji gospodarczych. Są to:

$$\begin{aligned} y_{0G}' &= \frac{1}{1 - b + bc}, \\ y_{0d}' &= \frac{-b}{1 - b + bc}, \\ y_{0c}' &= \frac{-b(a - bd + I + G)}{(1 - b + bc)^2}. \end{aligned}$$

Pierwsza pochodna cząstkowa to tzw. *mnożnik wydatków rządowych*. Z faktów, że $b \in (0; 1)$, a $bc > 0$ wynika, że mnożnik ten jest dodatni. Wyciągamy stąd wniosek, że wraz ze wzrostem wydatków rządowych przy nie zmienionych innych parametrach rośnie dochód równowagi rynkowej.

Druga pochodna cząstkowa, tzw. *mnożnik podatków stałych*, jest ujemna, bowiem: $-b < 0$. Zatem przy wzroście podatków innych niż podatek dochodowy dochód równowagi rynkowej maleje.

Trzecia pochodna cząstkowa to tzw. *mnożnik stopy podatku dochodowego*. Pochodną tę możemy zapisać w postaci

$$y_{0c}' = \frac{-by_0}{1 - b + bc}.$$

Wynika stąd, że ta pochodna jest też ujemna. Oznacza to, że zwiększenie stopy podatku dochodowego powoduje zmniejszenie dochodu równowagi rynkowej.

8.9. Metoda najmniejszych kwadratów

Oczekujemy, że pewna wielkość ekonomiczna powinna *w przybliżeniu* wyrażać się funkcją liniową $y = ax + b$. Niestety nie znamy współczynników a i b i chcemy je wyznaczyć. W tym celu przeprowadzamy badania wybierając pewne wielkości $x_1, \dots, x_n$ i otrzymując odpowiednie wartości $y_1, \dots, y_n$. Otrzymujemy pary punktów $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Jeśli połączymy je odcinkami, to otrzymany w ten sposób wykres będzie pewną łamaną, a nie prostą. Wynika to zarówno z tego, że nasza wielkość jest tylko w przybliżeniu funkcją liniową jak i z możliwych błędów przy badaniu. Tym niemniej będziemy próbowali znaleźć taką prostą $y = ax + b$, która będzie najbardziej zbliżona do otrzymanej na podstawie badań łamanej. Tu pojawia się naturalne pytanie: co oznacza *najbardziej zbliżona*, czyli jak zmierzyć „odległość” pomiędzy łamaną i prostą. Żeby wybrać najsensowniejszy sposób rozpatrzmy najprostszą sytuację, kiedy przeprowadziliśmy dwa takie badania. Mamy zatem wartości $y(x_1) = y_1$ i $y(x_2) = y_2$. Natomiast oczekiwana funkcja liniowa w tych samych punktach przyjmie wartości $z_1 = ax_1 + b$ i $z_2 = ax_2 + b$. Chcemy, żeby pewna kombinacja różnicy pomiędzy y_1 i z_1 oraz y_2 i z_2 była jak najmniejsza. Możemy to rozumieć następująco: badanie daje nam parę liczb (y_1, y_2) a oczekiwana funkcja liniowa inną parę liczb (z_1, z_2) . Ale każdą parę liczb możemy traktować jako punkt na płaszczyźnie, a odległość pomiędzy dwoma punktami (y_1, y_2) i (z_1, z_2) wyraża się wzorem:

$$\sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}.$$

Jeśli teraz będziemy przeprowadzać nie dwa, ale n badań, to otrzymamy n współrzędnych y_i i n współrzędnych z_i ($i = 1, \dots, n$). Wówczas odległość pomiędzy nimi określa wzór:

$$\sqrt{(z_1 - y_1)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2}.$$

Podstawiając za z_i wartości funkcji liniowej $y = ax + b$ w punktach x_i otrzymujemy funkcję dwóch zmiennych a i b :

$$O(a, b) = \sqrt{(ax_1 + b - y_1)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2}.$$

Nasz problem polega na znalezieniu takich a i b , przy których funkcja ta przyjmuje najmniejszą wartość. Oczywiście jest, że zamiast badać funkcję $O(a, b)$ możemy badać funkcję

$$S(a, b) = O^2(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2.$$

Zarówno a jak i b mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Musimy znaleźć punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, w którym funkcja S przyjmuje najmniejszą wartość. Jak widzimy, funkcja S jest sumą kwadratów. Stąd wzięła się nazwa tej metody.

Najpierw zauważmy, że gdy a dąży do $\pm\infty$, to S dąży do ∞ , i gdy b dąży do $\pm\infty$, to S dąży do ∞ . Wnioskujemy z tego, że funkcja S musi przyjmować najmniejszą wartość w pewnym punkcie stacjonarnym, czyli takim, w którym pochodne cząstkowe funkcji S są równe zeru. Policzmy je.

Mamy:

$$\begin{aligned} S'_a &= 2x_1(ax_1 + b - y_1) + \dots + 2x_n(ax_n + b - y_n) \\ &= a(2x_1^2 + \dots + 2x_n^2) + b(2x_1 + \dots + 2x_n) - 2(x_1y_1 + \dots + x_ny_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_b &= 2(ax_1 + b - y_1) + \dots + 2(ax_n + b - y_n) \\ &= a(2x_1 + \dots + 2x_n) + 2bn - 2(y_1 + \dots + y_n). \end{aligned}$$

Przyrównujemy pochodne cząstkowe do zera i otrzymujemy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (a i b).

$$\begin{cases} a(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + b(x_1 + \cdots + x_n) &= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n, \\ a(x_1 + \cdots + x_n) + bn &= y_1 + \cdots + y_n. \end{cases}$$

Rozwiązanie (a_0, b_0) takiego układu wyraża się wzorem (patrz wzory Cramera):

$$a_0 = \frac{\det \begin{bmatrix} x_1y_1 + \cdots + x_ny_n & x_1 + \cdots + x_n \\ y_1 + \cdots + y_n & n \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x_1^2 + \cdots + x_n^2 & x_1 + \cdots + x_n \\ x_1 + \cdots + x_n & n \end{bmatrix}},$$

$$b_0 = \frac{\det \begin{bmatrix} x_1^2 + \cdots + x_n^2 & x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \\ x_1 + \cdots + x_n & y_1 + \cdots + y_n \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x_1^2 + \cdots + x_n^2 & x_1 + \cdots + x_n \\ x_1 + \cdots + x_n & n \end{bmatrix}}.$$

PRZYKŁAD 8.25. Wielkość popytu na produkowany przez pewien zakład wyrób w tys. sztuk w kolejnych kwartałach dwóch kolejnych lat wyrażała się odpowiednio danymi: 5.1, 5.3, 5.0, 5.8, 6.1, 5.3, 6.1, 7.1. Jaka funkcja liniowa najlepiej opisuje trend wzrostu (albo spadku - to się okaże) popytu na ten towar?

Czas mierzymy w latach, zatem $x_1 = 1/4$, $x_2 = 2/4, \dots$, $x_8 = 2$. Zgodnie z wzorami obliczamy liczby a_0 i b_0 .

Mamy $a_0 = 0.914285$, $b_0 = 4.696428$.

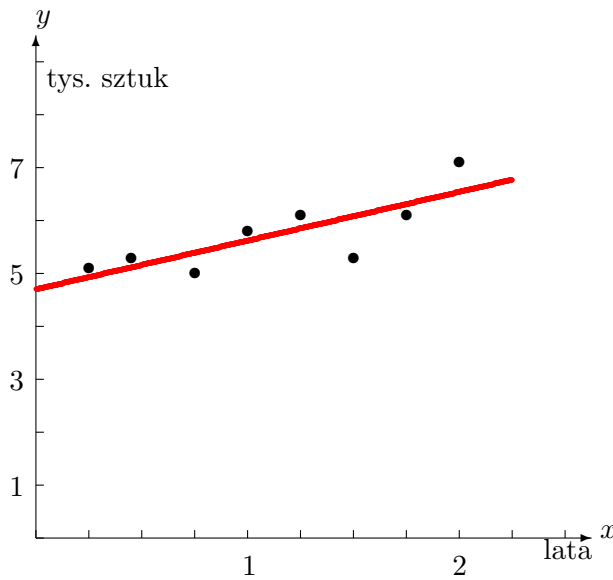
Zatem poszukiwana funkcja liniowa to funkcja postaci

$$y = 0.914285x + 4.696428. \quad \square$$

Sytuację ilustruje rysunek 8.12.

W dzisiejszych czasach nikt nie dokonuje ręcznie takich obliczeń. Autor posłużył się prostym algorytmem przedstawionym poniżej, pozwalającym obliczać a_0 i b_0 dla dowolnych danych x_i i y_i :

```
label 5,10;
var x,y,a,b,c,d,ao,bo:real;
```



Rysunek 8.12.

```

i,n:integer;f:char;
begin
i:=0;a:=0;b:=0;c:=0;d:=0;
writeln('Podaj liczbe prob');readln(n);
5:
i:=i+1; if i=n+1 then goto 10;
writeln('Podaj x(',i,')');readln(x);
writeln('Podaj y(',i,')');readln(y);
a:=a+x*y;b:=b+y;c:=c+x;d:=d+x*x;goto 5;
10:
ao:=(n*a-b*c)/(d*n-c*c);
bo:=(d*b-a*c)/(d*n-c*c);
writeln(ao:4:6);writeln(bo:4:6);
f:=readkey
end.

```

Warto wspomnieć, że istnieje sporo gotowych programów (i cały czas powstają nowe) wykonujących obliczenia potrzebne w wielu takich i podobnych zastosowaniach matematyki.

ZADANIA

8.10. Popyt na pewien wyrób kształtował się w czterech kwartałach 1995 roku następująco (w tys. ton): 2.1, 2.0, 2.0, 1.8. Jaka funkcja liniowa najlepiej obrazuje tę sytuację?

8.11. Poziom wody w pewnym jeziorze zmierzono w 12 miesiącach roku 1996 i otrzymano wyniki w metrach nad poziomem morza: 80.2, 80.2, 80.5, 80.2, 80.1, 79.9, 79.3, 79.1, 79.2, 79.5, 79.9, 80.2. Znajdź funkcję liniową przybliżającą trend zmiany poziomu wody w tym jeziorze.

Odpowiedzi

Rozdział 1.

1.1. a) fałsz; b) prawda; c) fałsz; d) fałsz.

1.2. a) tak; b) tak; c) nie; d) tak.

1.3. a) $\bigwedge_{a \in \mathbb{R}} \bigwedge_{b \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \bigvee_{x \in \mathbb{R}} ax + b = y$;

b) $\bigvee_{a \in \mathbb{R}} \bigvee_{b \in \mathbb{R}} \bigvee_{c \in \mathbb{R}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} ax^2 + bx + c \neq y$.

1.4. a) $(x^2 \geq 5) \wedge (x < 3 \wedge x^3 > 7)$;

b) $(x < y + 3) \wedge x^2 \geq y^3 \wedge x \leq y$;

c) $(x \neq a \wedge x \neq b) \vee (x < a^2 \wedge x \leq b^2)$.

d) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{k \in \mathbb{N}} k \leq n + m$;

e) $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} x \neq \frac{n+m}{3}$;

f) $\bigwedge_{x > 1} \bigvee_{y < x} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} (x \geq y) \wedge (x \neq y^m)$.

1.6. $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \{5, 8\}$. **1.7.** a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

b) $\{2, 3, 4, 5\}$; c) $\emptyset$; d) $\{2, 3, 4\}$. **1.8.** $\{0, 2\}$. **1.9.** a) z dwóch; b) z dwóch; c) z jednego.

1.10. $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cap B \cap C = \{2\}$, $(B \cup C) \cap A = A$. **1.13.** a) tak, $A = \{x_0\}$, $B = \{y_0\}$;

b) tak, $A = \mathbb{R}$, $B = \{4\}$; c) nie; d) tak, $A = [-1; 1]$, $B = [-1; 1]$. **1.15.** 2^n . **1.17.**

a) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}$; b) $\sum_{i=0}^n (x - i)$; c) $\sum_{i=0}^{55} (2i + 1)$; d) $\sum_{i=1}^{15} x^i$; e) $\sum_{i=1}^n (2i + 1)x^{2i+1}$. **1.18.** a) 30;

b) 104; c) $2\frac{9}{20}$.

Rozdział 2.

2.1. a) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$; b) $[1; \infty)$; c) $(-1; 1)$. **2.2.** a) $D_f = (-\infty; 2] \cup [2; \infty)$, $ZW = [0; \infty)$;

b) $D_f = \mathbb{R}$, $ZW = [\frac{1}{16}, \infty)$; c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ZW = (-\infty; -4] \cup [4; \infty)$;

d) $D_f = [2; \infty)$, $ZW = [0; \infty)$. **2.5.** $(f \circ g)(x) = x^4 + 3x^2 + 2$, $(g \circ f)(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 1$. **2.6.** b) $(f \circ g)(13) = 33$. **2.8.** $D_{g \circ f} = \{1, 2, 3\}$, $D_{f \circ g} = \{1\}$. **2.9.** a) $f(x) = x^2 + 2$,

$g(y) = \sqrt{y}$; b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(y) = (y + 1)^3$; c) $f(x) = (x - 1)$, $g(y) = 3y^2 - 2y$.

2.10. $f^{-1}(y) = \frac{9}{y^2} + 8$. **2.11.** a) $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y^3 - 1}$; b) $f^{-1}(y) = \sqrt[4]{\frac{1}{y} - 6}$. **2.12.**

a) $f^{-1}(y) = \frac{y+6}{5}$; b) $f^{-1}(y) = \frac{y}{y-1}$; c) $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$; d) $f^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$. **2.13.**

$f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1; 1)$. **2.14.** a) parzysta; b) rosnąca, nieparzysta; c) parzysta;

e) rosnąca; f) nieparzysta.

Rozdział 3.

3.1. a) -29 ; b) -26 ; c) 4 . **3.2.** a) $\frac{1}{4}$; b) $-\frac{16}{15}$; c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{\frac{3}{5}}$. **3.3.** a) 0 ; c) 0 . **3.4.** a) rosnący, ograniczony; b) malejący; c) ograniczony; d) nieograniczony. **3.5.** $\frac{20}{27}$. **3.6.** $\frac{5}{9}$. **3.7.** a) 1 ; b) 1 ; c) 1 ; d) 0 ; e) 0 ; f) 0 ; g) $\frac{1}{2}$; h) 0 ; i) $\frac{1}{3}$; j) 0 ; k) nie istnieje; l) nie istnieje; m) e^2 ; n) e^{-5} . **3.8.** a) 4 ; b) 3 ; c) 0 ; d) 0 .

Rozdział 4.

4.1. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$. **4.3.** a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; b) $\frac{2}{9}$; c) ∞ ; **4.7.** a) -4 ; b) ∞ ; c) $-\infty$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0 ; f) $\frac{1}{3}$. **4.9.** a) $a = -2$; b) $a = -3$; c) $a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ lub $a = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. **4.10.** tak. **4.11.** tak. **4.12.** 1.8125. **4.13.** 9 dolarów.

Rozdział 5.

5.1. a) $\sin x + x \cos x$; b) $2x \cos x$; c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; d) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; e) $\frac{1}{1+x^2}$; f) $\frac{3(\ln x)^2}{x}$; g) $4(\sin x)^3 \cos x$; h) $\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$; i) $\frac{1}{n} \sqrt[n]{(x+1)^{1-n}}$; k) $6x(\sin(x^2))^2 \cos(x^2)$; l) $\operatorname{ctg} x$; n) $-\frac{(x^2+1)\sin x + 2x \cos x}{(x^2+1)^2}$. **5.2.** a) x ; b) $\ln 2 \cdot x$; c) $\ln 0.1 \cdot x$; d) $\frac{5x}{5x+3}$; e) $1+x$; f) $\frac{2x^2+5x}{x^2+5x-1}$. **5.3.** b) rosnąca; c) rosnąca; d) rosnąca. **5.4.** a) malejąca w $(-\infty; 0)$ i $(\frac{10}{3}; \infty)$, rosnąca w $(0; \frac{10}{3})$; b) malejąca w $(-\infty; \frac{9}{4})$, rosnąca w $(\frac{9}{4}; \infty)$; c) malejąca w $(0; 1)$, rosnąca w $(1; \infty)$; d) malejąca w $(-3; 0)$ i $(0; 3)$, rosnąca w $(-\infty; -3)$ i $(3; \infty)$; e) malejąca w $(-\infty; \frac{\ln(3/2)}{2})$, rosnąca w $(\frac{\ln(3/2)}{2}; \infty)$. **5.6.** a) maksimum w punkcie $x = 0$, minimum w punkcie $x = 2$; b) maksimum w punkcie $x = -1$, minimum w punkcie $x = 1$; c) maksimum w punkcie $x = -\sqrt{2}$, minimum w punkcie $x = \sqrt{2}$; d) maksimum w punkcie $x = -1 - \sqrt{2}$, minimum w punkcie $x = -1 + \sqrt{2}$; e) maksimum w punkcie $-2 - \sqrt{2}$ i minimum w punkcie $-2 + \sqrt{2}$; f) maksimum w punkcie $\sqrt[5]{3}$. **5.7.** a) największa 7 , najmniejsza $1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$; b) największa 0 , najmniejsza -1 ; c) największa $3 - \sqrt{2}$, najmniejsza $\frac{3}{4}$; d) najmniejsza e , największej nie ma. **5.8.** 50×100 metrów. **5.9.** $\frac{50-10\sqrt{7}}{3}$. **5.10.** promień $\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$, wysokość $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$. **5.11.** a) 1 ; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) 0 ; e) e ; f) $\ln 3 - \ln 2$; g) 0 ; h) 0 ; i) 0 ; j) ∞ ; k) 0 . **5.12.** a) $2 \ln x + 3$; b) $-9 \sin 3x$; c) $(2 + 4x^2)e^{x^2}$; d) $\frac{2}{(1-x)^3}$; e) $-2 \sin x e^x$; f) $12x^2 - 18x$. **5.13.** a) maksimum w 0 , minimum w $\frac{10}{3}$; b) maksimum w $-\sqrt{1/2}$, minimum w $\sqrt{1/2}$; d) minimum w -1 ; e) maksimum w -1 , minimum w 1 ; **5.14.** a) wklęsła w $(-\infty; 1/3)$, wypukła w $(1/3; \infty)$; b) wypukła w $(-\infty; 0)$ i $(\sqrt[3]{2}; \infty)$, wklęsła w $(0; \sqrt[3]{2})$; c) wklęsła w $(-\infty; -1)$ i $(1; \infty)$, wypukła w $(-1; 1)$; d) wypukła w $\mathbb{R}$; e) wklęsła w $(0; \sqrt[5]{1/4})$, wypukła w $(\sqrt[5]{1/4}; \infty)$; f) wypukła w $(0; 1)$, wklęsła w $(1; \infty)$. **5.15.** nigdzie nie rośnie coraz szybciej, maleje coraz wolniej w $(0; 1)$. **5.16.** a) $(-\infty; 1)$; b) $(2; \infty)$; c) nigdzie. **5.17.** rośnie coraz wolniej. **5.18.** a) pozioma $y = 0$ w $\pm\infty$; b) ukośna $y = x + 3$ w $\pm\infty$; c) pionowa $x = 0$.

Rozdział 6.

6.1. a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + c$; b) $-\frac{1}{x} + c$; c) $x \sin x + \cos x + c$; d) $(x^2 - 2x + 2)e^x + c$; e) $\frac{2}{9}(3x-5)^{\frac{3}{2}} + c$; g) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$; h) $-\frac{1}{5} \cos(5x-7) + c$; j) $\ln |\sin x| + c$; k) $-\frac{1}{3}e^{-3x} + c$;

l) $x + 2\ln|x - 1| + c$. **6.2.** a) 9; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{\pi}{2} - 1$; d) 1; e) $\frac{1}{4}(10^{4/3} - 7^{4/3})$; f) e^2 ;
g) $\ln(1 + e) - \ln 2$; h) $\frac{15}{\ln 2}$. **6.3.** a) $\frac{1}{20}$; b) $1/6$; c) $2 - \sqrt{2}$. **6.4.** a) $\frac{1}{4}$; b) 1; c) π ; d) 2.

Rozdział 7.

7.1. a) niewykonalne; b) niewykonalne; c) $\begin{bmatrix} 14 & 24 & 34 \\ 19 & 33 & 47 \\ 24 & 42 & 60 \end{bmatrix}$; d) niewykonalne;

e) $\begin{bmatrix} 24 & 30 & 36 \\ 51 & 66 & 81 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 8 & 26 & 44 \\ 17 & 62 & 107 \end{bmatrix}$; g) niewykonalne; h) niewykonalne. **7.2.** a) -2 ;

b) 0 ; c) $\frac{111}{105}$; d) -3 . **7.3.** a) 120 ; b) 480 ; **7.4.** a) 1 ; b) 2 ; c) 2 ; d) 2 ; e) 3 ; f) 2 ; g) 2 ;
h) 3 ; i) 3 ; j) 4 ; k) 2 ; l) 3 . **7.5.** a) $x = 1, y = 2, z = 3$; b) $x = -1, y = 3, z = 2$. **7.6.**

a) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$; b) nie istnieje; c) $-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; d) $-\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -8 & 12 \\ 6 & -7 & -4 & 6 \\ -6 & 2 & 4 & -6 \\ 4 & -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

7.7. a) $x = \frac{14}{3}, y = -\frac{4}{3}, z = -\frac{7}{3}$; b) $x = 1, y = 2, z = 2$; c) $x = \frac{14}{3}, y = -\frac{4}{3}, z = -\frac{10}{3}$.

7.8. a) $x = \frac{7-7z}{9}, y = \frac{-5+5z}{9}, z \in \mathbb{R}$; b) $x = \frac{-7-9z}{3}, y = \frac{-5-6z}{3}, z \in \mathbb{R}$; c) $x \in \mathbb{R},$

$y = \frac{29}{10} - 2x, z = \frac{11}{10} + x, t = \frac{16}{5} - 2x$. **7.9.** a) $\frac{1}{19} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{18} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \\ 20 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

7.10. a) cramerowski; b) sprzeczny; c) nieoznaczony: $y = \frac{7}{2} + x, z = \frac{9}{2} - 2x, x \in \mathbb{R}$.

7.11. 7.6, 10, 1. **7.12.** 45.66, 58.66, 69.00.

Rozdział 8.

8.2. 0. **8.4.** a) $f'_x = 2xy^3, f'_y = 3x^2y^2$; b) $f'_x = 3e^{3x+4y}, f'_y = 4e^{3x+4y}$; c) $f'_x = -2x \sin(x^2 + 5y), f'_y = -5 \sin(x^2 + 5y)$; d) $f'_x = \frac{y-xy}{e^x}, f'_y = \frac{x}{e^x}$; e) $f'_x = \frac{e^x}{e^x+y}, f'_y = \frac{1}{e^x+y}$; f) $f'_x = 3x^2y^2z, f'_y = 2x^3y^2z, f'_z = x^3y^2$. **8.5.** a) $E_x f = \frac{4x}{4x+3y}, E_y f = \frac{3y}{4x+3y}$;
b) $E_x f = \frac{x}{2x+3y}, E_y f = \frac{3y}{4x+6y}$; c) $E_x f = \frac{x+2y}{x+y}, E_y f = \frac{x}{x+y}$; d) $E_x f = \frac{6x}{6x+2yz^2}, E_y f = \frac{2yz^2}{6x+2yz^2}, E_z f = \frac{4yz^2}{6x+2yz^2}$. **8.6.** najmniejsza -9 , największa -6 . **8.7.** najmniejsza 0 ,
największa 4 . **8.8.** $3\sqrt[3]{2}$. **8.9.** $r = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \sqrt[3]{15} \sqrt[3]{V/\pi}, h = \frac{1}{5} \sqrt[3]{15} \sqrt[3]{V/\pi}, s = \frac{2}{5} \sqrt[3]{15} \sqrt[3]{V/\pi}$.

8.10. $y = -0.36x + 2.2$, x - lata, y - tys. ton. **8.11.** $y = -0.85x + 80.31$, x - lata, y - metry nad poziomem morza.

Indeks

- alternatywa, 11
- asymptota, 100
- badanie funkcji, 102
- całka nieoznaczona, 107
- całka niewłaściwa, 114
- całka oznaczona, 110
- całka, 107
- całkowanie przez części, 108, 111
- całkowanie przez podstawienie, 108, 111
- ciąg arytmetyczny, 50
- ciąg geometryczny, 51
- ciąg malejący, 49
- ciąg ograniczony, 49
- ciąg rosnący, 49
- ciąg zbieżny, 52
- ciąg, 49
- ciągłość funkcji, 63, 162
- dwumian Newtona, 21
- dziedzina funkcji, 158
- dziedzina, 25
- ekstremum, 83
- elastyczność funkcji, 75
- funkcja ciągła, 63
- funkcja kwadratowa, 38
- funkcja liniowa, 38
- funkcja logarytmiczna, 42
- funkcja malejąca, 37, 82
- funkcja nieparzysta, 37
- funkcja odwrotna, 34
- funkcja okresowa, 43
- funkcja parzysta, 37
- funkcja potęgowa, 38, 41
- funkcja rosnąca, 37, 82
- funkcja różnowartościowa, 34
- funkcja wewnętrzna, 32
- funkcja wklęsła, 95
- funkcja wykładnicza, 38, 41
- funkcja wymierna, 40
- funkcja wypukła, 95
- funkcja zewnętrzna, 32
- funkcja, 25
- funkcje trygonometryczne, 43
- główna przekątna, 125
- gradient funkcji, 166
- granica funkcji, 59
- granica lewostronna, 60
- granica prawostronna, 60
- iloczyn kartezjański, 19
- iloczyn skalarny, 119
- iloczyn zbiorów, 17
- implikacja, 11
- koniunkcja, 11
- krańcowe wielkości, 74
- kwantyfikatory, 14
- logarytm naturalny, 42
- macierz diagonalna, 126
- macierz jednostkowa, 126
- macierz kwadratowa, 125
- macierz odwrotna, 132
- macierz rozszerzona, 136, 149
- macierz symetryczna, 126
- macierz transponowana, 123
- macierz, 122
- maksimum, 83
- metoda najmniejszych kwadratów, 186
- metoda Sarrusa, 128
- minimum, 83
- mnożenie macierzy, 124

- model dochodu narodowego, 139
- model Domara, 79
- model nakładów i wyników, 153
- monotoniczność funkcji, 82
- nierówność trójkąta, 21
- operacje elementarne, 146
- operacje logiczne, 11
- oprocentowanie ciągłe, 55
- oprocentowanie proste, 51
- oprocentowanie składane, 51
- parametry układu, 143
- pochodna cząstkowa, 164
- pochodna drugiego rzędu, 94
- pochodna funkcji, 71
- poziomica, 161
- prawa de Morgana, 13, 15, 19
- przeciwdziedzina, 26
- przekształcenie liniowe, 121
- przekształcenie odwrotne, 141
- przeskalowanie wykresu, 28
- przestrzeń euklidesowa, 119, 157
- przestrzeń liniowa, 118
- przestrzeń skończenie wymiarowa, 120
- punkt przegięcia, 95
- reguła de l'Hospitala, 93
- rozwiązanie bazowe, 145
- różnica zbiorów, 17
- różniczkowalność funkcji, 71
- równania równowagi, 46
- równoważność, 11
- rząd macierzy, 131, 134
- silnia, 21
- suma zbiorów, 17
- symbol Newtona, 21
- tautologia, 14
- twierdzenie Kroneckera-Capelliego, 136
- twierdzenie Lagrange'a, 78
- twierdzenie o trzech ciągach, 54
- twierdzenie Rolle'a, 78
- układ równań liniowych, 135, 141, 149
- warstwica, 161
- wartość logiczna, 11
- wektory liniowo niezależne, 120
- wektory liniowo zależne, 120
- wielomian, 39
- własność Darboux, 66
- współczynnik nakładów, 153
- wykres funkcji, 27, 159
- wymiar przestrzeni, 120
- wyznacznik, 126
- wzory Cramera, 136, 137
- wzory skróconego mnożenia, 22
- wzór Laplace'a, 127
- zaprzeczenie, 11
- zbiór wartości, 26
- zbiór, 16
- złożenie funkcji, 32
- zmienne bazowe, 144